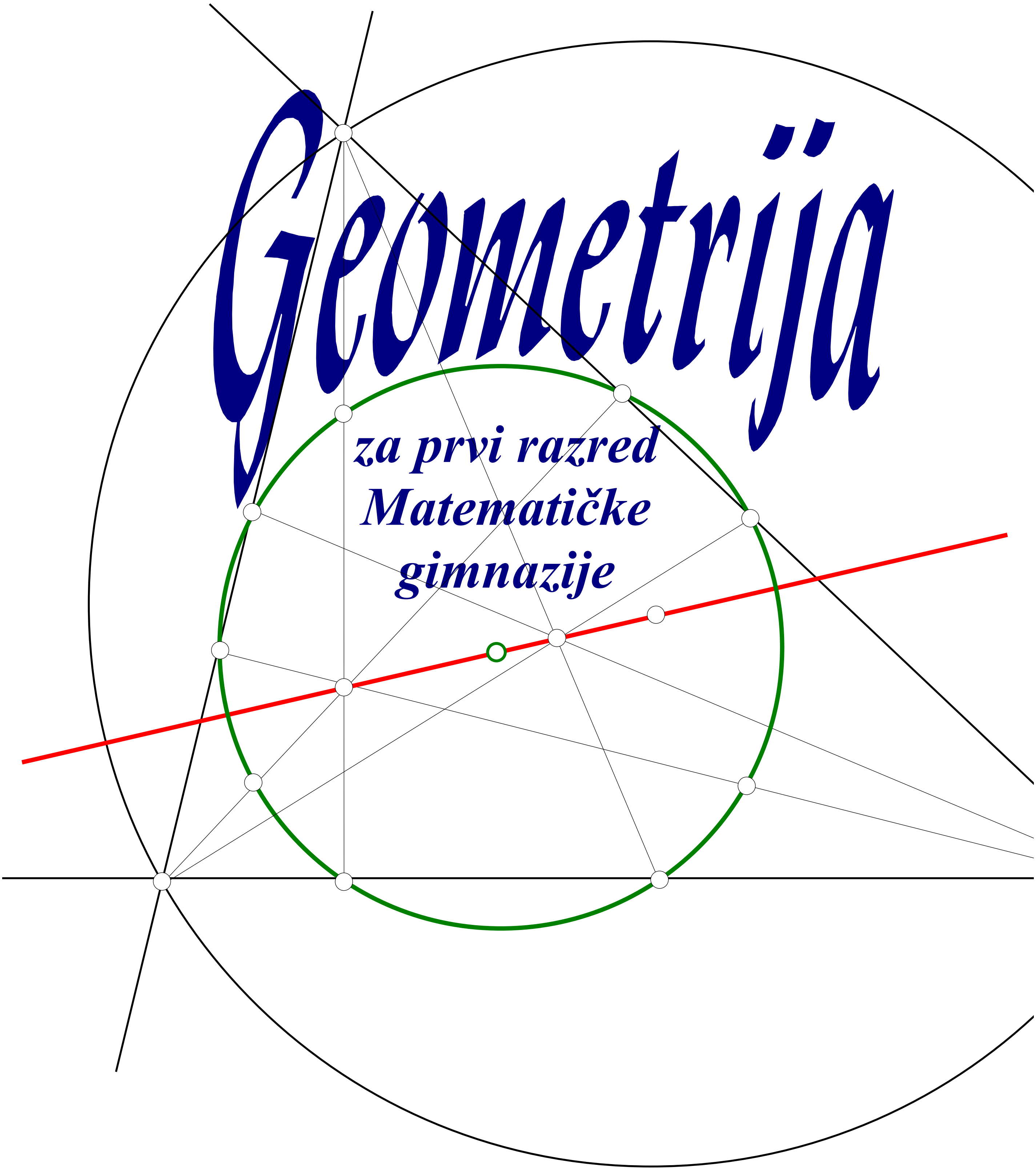
Milan Mitrović *Srđan Ognjanović*
Mihailo Veljković *Ljubinka Petković*
Nenad Lazarević

Geometrija



za prvi razred Matematičke gimnazije

Milan Mitrović *Srđan Ognjanović*
Mihailo Veljković *Ljubinka Petković*
Nenad Lazarević

Geometrija

za I razred
Matematičke gimnazije

Udžbenik sa zbirkom zadataka
Drugo dopunjeno izdanje

Beograd 1998

Autori:

Milan Mitrović, mr Srđan Ognjanović, mr Mihailo Veljković,
Ljubinka Petković, Nenad Lazarević,
profesori Matematičke gimnazije u Beogradu

GEOMETRIJA
ZA PRVI RAZRED MATEMATIČKE GIMNAZIJE
Drugo dopunjeno izdanje

Izdavač: *"KRUG",* Beograd

Za izdavača: *Marijana Ivanović*

Recenzenti:

dr Dragoslav Ljubić, docent Matematičkog fakulteta u Beogradu
dr Rade Doroslovački, profesor Tehničkog fakulteta u Novom Sadu

Obrada na računaru: *Milan Mitrović*

Korektura: *autori*

Korice: *Milan Mitrović*

Predgovor

Ova knjiga napisana je prema nastavnom planu i programu za predmet geometrija, za prvi razred *Matematičke gimnazije u Beogradu*.

Formalno, gradivo je izloženo tako da se ne oslanja na prethodno znanje iz geometrije.

Prva dva poglavlja vezana su za aksiomatsko uvođenje geometrije. Detaljno se izučavaju posledice aksioma incidencije i paralelnosti, dok se kod preostalih grupa aksioma posledice uglavnom ne dokazuju.

Treće i peto poglavlje odnose se na podudarnost a šesto na njenu primenu u konstruktivnim zadacima.

U četvrtom poglavlju uvede se vektori i dokazuje se Talesova teorema.

U sedmom poglavlju razmatraju se izometrijske transformacije, i izvršena je njihova klasifikacija.

Osmo i deveto poglavlje odnose se na sličnost i inverziju, a deseto predstavlja uvod u trigonometriju, i to samo pravouglog trougla.

Na kraju većine poglavlja dat je izvestan broj zadataka za vežbu. Među njima ima i zadataka sa takmičenja mladih matematičara, kao i tvrđenja koja imaju i svoj istorijski značaj.

Grupa raznih zadataka nalazi se na kraju knjige. U tom poglavlju zadaci namerno nisu poređani po oblastima, ali često težim zadacima prethode pomoćni.

Kod određenih poznatih teorema i problema, date su i kratke istorijske napomene, što čini nam se, pomaže učenicima da sagledaju razvoj geometrije kroz vekove.

Posebno se zahvaljujemo recenzentima *dr Dragoslavu Ljubiću* i *dr Radetu Doroslovačkom*. Takođe se zahvaljujemo i svima koji su, na bilo koji način doprineli izgledu udžbenika, a naročito *dr Zoranu Lučiću* i *mr Predragu Janičiću* koji su pročitali delove rukopisa, i pomogli sa nizom korisnih primedbi i sugestija.

Autori

Predgovor drugom izdanju

Drugo izdanje dopunjeno je sa dve nove glave: *Rešenja zadataka* i *Dodatak*.

Prva od tih glava sadrži rešenja i uputstva određenog broja karakterističnih zadataka. Napominjemo da ti zadaci nisu po pravilu najteži u knjizi.

Glava *Dodatak* sadrži teoreme i dokaze teorema, koje svojim sadržajem ili težinom opterećuju osnovni deo knjige. Na taj način rasterećen je redovni deo udžbenika, a ostavljena je mogućnost da se pročitaju izostavljeni delovi.

Oznaka * u redovnom delu udžbenika ukazuje na *Dodatak*.

Na kraju je dat i *Indeks*, koji može čitaocu pomoći u lakšem nalaženju uvedenih pojmova.

Takođe, ispravljene su uočene greške iz prethodnog izdanja.

Zahvaljujemo se recenzentima *dr Dragoslavu Ljubiću* i *dr Radetu Doroslovačkom*, kao i svima koji su doprineli poboljšanju ovog udžbenika u odnosu na prvo izdanje.

Autori

Sadržaj

I Uvod u geometriju **1**

1.1 Deduktivni i induktivni metod zaključivanja 1
1.2 Osnovni pojmovi i osnovna tvrđenja u geometriji 3
1.3 Kratak istorijski pregled razvoja geometrije. Peti Euklidov postulat 4

II Euklidska geometrija **8**

2.1 Aksiome incidencije 9
2.2 Aksiome rasporeda 12
2.3 Aksiome podudarnosti 19
2.4 Aksioma neprekidnosti 20
2.5 Aksioma paralelnosti (Plejferova aksioma) 24
Zadaci 29

III Podudarnost **32**

3.1 Izometrijska transformacije 32
3.2 Relacija podudarnosti figura 37
3.3 Podudarnost duži 38

3.4 Podudarnost uglova, pravi uglovi, relacija normalnosti pravih 39
3.5 Podudarnost trouglova 43
3.6 Uglovi na transverzali. Zbir uglova u trouglu 47
3.7 Nejednakost trougla 52
3.8 Četvorougao, paralelogram, srednja linija trougla 54
3.9 Značajne tačke trougla 59
Zadaci 66

IV Vektori **73**

4.1 Definicija vektora. Sabiranje vektora 73
4.2 n-ti deo vektora. Množenje vektora racionalnim skalarom 78
4.3 Proizvod vektora realnim skalarom 84
4.4 Vektori u euklidskoj geometriji 87
Zadaci 91

V Daljnja primena podudarnosti **94**

5.1 Primena podudarnosti na krug 94
5.2 Centralni i periferijski ugao kruga 96
5.3 Tangentni četvorougao 101
5.4 Tetivni četvorougao 102
Zadaci 105
5.5 Relacija upravnosti prave i ravni. 113
5.6 Diedar. Ortogonalnost ravni 115
5.7 Ugao prave prema ravni. Ugao dveju mimoilaznih pravih 117
Zadaci 120

VI Konstrukcija ravnih figura **122**

Konstrukcija ravnih figura 122
Zadaci 129

VII Izometrijske transformacije ravni. Klasifikacija **134**

7.1 Direktne i indirektne izometrijske transformacije 134
7.2 Osna refleksija 135
7.3 Predstavljanje izometrija ravni pomoću osnih refleksija 140
7.4 Pramenovi pravih u ravni 142
7.5 Centralna rotacija 144
7.6 Centralna simetrija 148
7.7 Translacija 150
7.8 Klizajuća refleksija 154
7.9 Klasifikacija izometrija ravni 157
Zadaci 158

VIII Sličnost **165**

8.1 Razmera duži. Talesova teorema 165
8.2 Homotetija 173
8.3 Transformacije sličnosti. Sličnost figura 176
8.4 Sličnost trouglova 179
8.5 Harmonijska spregnutost parova tačaka. Apolonijev krug 182
8.6 Neke karakteristične teoreme 186
8.7 Potencija tačke u odnosu na krug 192
Zadaci 196

IX Inverzija **204**

9.1 Definicija i osnovne osobine inverzije 204
9.2 Apolonijevi problemi o dodiru krugova 209
Zadaci 212

Razni zadaci 215

Rešenja zadataka 228

Indeks 267

Literatura 274

Glava I

Uvod u geometriju

1.1 Deduktivni i induktivni metod zaključivanja

U nižim razredima osnovne škole upoznali smo se sa mnogim geometrijskim pojmovima kao što su npr. trougao, krug, prav ugao, itd. Kasnije smo naučili i mnoga tvrđenja: stavove o podudarnosti trouglova, Pitagorinu i Talesovu teoremu. U početku, tvrđenja nismo dokazivali, već smo zaključke izvodili na osnovu niza pojedinačnih primera. Taj način zaključivanja naziva se induktivni metod. Induktivni metod (lat. inductio - uvođenje) je dakle, način rasuđivanja kod koga od pojedinačnih dolazimo do opštih zaključaka. U višim razredima sve veći broj tvrđenja smo počeli dokazivati. Kroz te dokaze prvi put smo se sreli sa tzv. deduktivnim načinom zaključivanja ili dedukcijom. Dedukcija (lat. deductio - izvođenje) je način rasuđivanja u kojem se od opštih dolazi do pojedinačnih zaključaka. Dakle, ideja kod ove metode je da dokazivanjem izvedemo opšti zaključak, pa ga zatim primenjujemo u pojedinačnim slučajevima.

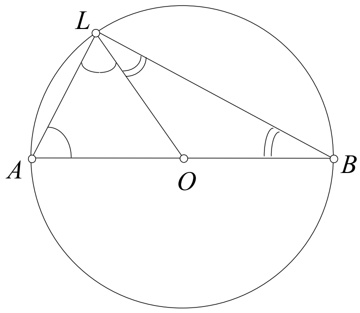
Kako kod induktivnog metoda ne možemo proveriti sve slučajeve, jer ih obično ima beskonačno mnogo, on može dovesti i do pogrešnih zaključaka. Deduktivnom metodom dolazimo do uvek tačnih zaključaka, ukoliko su pretpostavke koje koristimo u dokazu tačne.

Na sledećem primeru analizirajmo oba pomenuta metoda. Želimo da dođemo do zaključka:

- *Svaki ugao nad prečnikom kruga je prav.*

Ako bismo primenjivali induktivni metod, proveravali bismo da li ova tvrdnja važi u nekim pojedinačnim slučajevima, kao što je npr. slučaj kada je teme ugla središte polukruga, itd. Naravno, ako bismo na osnovu tih pojedinačnih primera izveli opšti zaključak, ne bismo mogli biti sigurni da ipak, u nekom slučaju koji nismo proverili, ovo tvrđenje ne važi.

Primenimo sada deduktivni metod:



Neka je AB prečnik kruga sa centrom O, i L proizvoljna tačka tog kruga različita od A i B. Dokažimo da je ugao ALB prav. Kako je $OA \cong OB \cong OL$ sledi da su trouglovi AOL i BOL jednakokraki pa je $\angle ALO \cong \angle LAO = \alpha$ i $\angle BLO \cong \angle LBO = \beta$. Tada je $\angle ALB = \alpha + \beta$. Zbir uglova u trouglu ALB je 180° pa je $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Iz toga sledi da je $\angle ALB = \alpha + \beta = 90^\circ$.

Razmotrimo prethodni dokaz. U njemu smo koristili sledeća dva tvrđenja:

- *Naspram podudarnih stranica u trouglu su podudarni uglovi.*
- *Zbir uglova u trouglu je 180^o.*

Takođe, koristili smo pojmove kao što su jednakokraki trougao, podudarnost uglova itd., a u samom iskazu tvrđenja, i pojmove periferijski ugao, prav ugao, krug i prečnik kruga. Da bismo bili sigurni da je tvrđenje koje smo dokazivali tačno moramo znati i da su tvrđenja koja koristimo u dokazu tačna. Dakle, u ovom slučaju pretpostavljamo da smo već dokazali pomenuta dva tvrđenja i da smo uveli sve pomenute pojmove. Jasno je da se ovakav problem može postaviti i kod svakog drugog tvrđenja, pa i kod ovih navedenih. To zahteva određenu sistematizaciju cele geometrije. Postavlja se, međutim, pitanje od čega početi, ako se u dokazu svakog tvrđenja, moraju opet koristiti ranije dokazana. Tako dolazimo do potrebe za polaznim tvrđenjima, što ćemo razmotriti u narednom odeljku.

Na osnovu svega iznetog, jasno je da ćemo se u daljem izlaganju geometrije koristiti isključivo deduktivnim metodom. Induktivni metod nam eventualno može poslužiti samo da naslutimo neke činjenice. Ali i u tom slučaju je neophodno da ih dokažemo tj. da primenimo deduktivni metod.

1.2 Osnovni pojmovi i osnovna tvrđenja u geometriji

U nekoj teoriji, kao što je geometrija, pri svakom uvođenju novog pojma, što činimo *definicijom*, taj pojam opisujemo nekim već poznatim pojmovima. Ali i te poznate pojmove opet smo morali uvesti preko nekih ranije poznatih. Dakle, neke od njih moramo prihvatiti kao osnovne ili polazne i pri tome ih ne definišemo.

Veze među pojmovima, kao i njihova odgovarajuća svojstva, dati su iskazima koje zovemo *tvrđenja teorije*. U želji da ispitamo da li neko tvrđenje važi pozivamo se na neka druga tvrđenja, za koja je takođe potrebno dokazati da važe. Jasno je da se, ukoliko bismo ovako nastavili, proces dokazivanja nikada ne bi završio. Zbog toga smo prinuđeni da neka od tih trvrđenja proglasimo za polazna (osnovna) i da ih ne dokazujemo. Ta polazna tvrđenja zovemo *aksiome* a ona iz njih izvedena *teoreme* te teorije. Formalno, *dokaz* nekog tvrđenja τ je niz tvrđenja koja logički slede jedna iz drugih, od kojih je svako ili aksioma ili iz aksioma izvedeno tvrđenje, a poslednje baš τ. Iako nije jednoznačno određen, izbor aksioma ne može biti proizvoljan. Pri tom izboru naročito treba voditi računa da te aksiome ne dovode do protivrečnih tvrđenja. To znači da izbor aksioma treba da bude takav, da u tako zasnovanoj teoriji ne postoji neko tvrđenje za koje su i ono i njegova negacija teoreme u toj teoriji. Takođe, potrebno je imati dovoljan broj aksioma da bi se za svako tvrđenje, koje se može formulisati u datoj teoriji, moglo utvrditi da li važi ili ne važi; tj. da je za svako tvrđenje ili ono ili njegova negacija teorema u toj teoriji. Za sistem aksioma koji zadovoljava prvi zahtev kaže se da je *neprotivrečan*, a za onaj koji zadovoljava drugi zahtev kaže se da je *potpun*. Pri izboru aksioma treba se rukovoditi i trećim zahtevom da je sistem aksioma *minimalan*, tj da se nijedna aksioma ne može izvesti iz ostalih, ali on za nas neće biti obavezujući.

U narednoj glavi počećemo sa strogim deduktivnim zasnivanjem euklidske geometrije; polazeći od osnovnih pojmova i aksioma izvodićemo nove pojmove i teoreme. Naravno, zbog težine i obima, taj posao nećemo uvek dosledno do kraja sprovoditi. To, uostalom, i nije cilj ove knjige. Naš zadatak je da, osim proširivanja znanja iz geometrije, čitaoca upoznamo sa osnovnim idejama o aksiomatskom zasnivanju neke deduktivne teorije. Takođe, veoma je važno da kroz razmatranje aksiomatskog zasnivanja geometrije, čitalac stekne naviku strogosti u dokazivanju.

Potrebno je još istaći da euklidsku geometriju nećemo zasnivati nezavisno od algebre i logike. Dakle, koristićemo pojmove kao što su npr. skup, funkcija, relacija sa svojstvima koja za njih važe; takođe i tzv. pravila izvođenja kao npr. metod svođenja na protivrečnost. Za te matematičke discipline, pri zasnivanju geometrije, kažemo da su *pretpostavljene teorije*.

1.3 Kratak istorijski pregled razvoja geometrije. Peti Euklidov postulat

Istorijski gledano, razvoj geometrije u dobroj je meri povezan sa prethodnim razmatranjem o induktivnoj i deduktivnoj metodi i aksiomatskom zasnivanju geometrije.

Geometrijom su se ljudi počeli baviti još u najranijoj istoriji. U početku je to bilo uočavanje karakterističnih oblika kao što su krug ili kvadrat. Na crtežima u pećinama nailazimo na interesovanje ljudi iz prvobitnih zajednica za simetriju likova.

U daljem svom razvoju čovek dolazi i do raznih svojstava geometrijskih figura. Uglavnom je to bilo zbog praktičnih potreba kao npr. merenje površine zemljišta - od čega i potiče naziv geometrije. U tom periodu geometrija se razvijala kao induktivna nauka. Do geometrijskih tvrđenja dolazilo se merenjem i proverom na pojedinačnim primerima. U tom smislu razvijena je bila geometrija kod mnogih starih civilizacija kao što su kineska, indijska i naročito egipatska.

Preokret u daljem razvoju geometrije i nauke uopšte dogodio se u staroj Grčkoj. Tada se po prvi put u istoriji počeo primenjivati deduktivni metod u geometriji. Prvi geometrijski dokazi vezani su za ime starogrčkog filozofa *Talesa iz Mileta* (*VII-VI* v. pre n. e.). Ovaj način razvoja geometrije nastavili su i drugi starogrčki filozofi, među kojima je jedan od najznačajnijih *Pitagora sa ostrva Samosa* (*VI* v. pre n. e.). U takvom izgrađivanju geometrije, posle mnoštva dokazanih teorema, pojavila se potreba za sistematizacijom, a kasnije i za uvođenjem aksioma. Jedan od prvih pokušaja aksiomatskog zasnivanja geometrije, i iz tog vremena jedini sačuvan, dao je starogrčki matematičar *Euklid iz Aleksandrije* (*III* v. pre n. e.) u svom poznatom delu *"Elementi"* koje se sastoji od 13 knjiga. Polazna tvrđenja on je podelio na aksiome i postulate od kojih su ovi poslednji čisto geometrijskog sadržaja. Neki od njih, doduše u izmenjenom obliku, zadržali su se i do današnjih dana. Ipak, sistem aksioma koji je Euklid dao nije bio potpun, i on sam je u dokazima nekih teorema neke delove previđao kao očigledne i nije ih dokazivao.

Navedimo postulate u obliku u kom ih je Euklid dao:

I *Pretpostavlja se da je moguće od svake tačke do svake druge tačke konstruisati pravu liniju.*

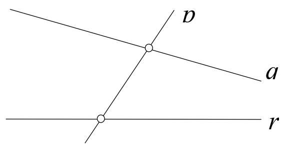
II *Pretpostavlja se da se svaka prava, sledujući njen pravac, može neograničeno produžavati.*

III *Pretpostavlja se da se u nekoj ravni oko svake njene tačke može opisati krug bilo kojeg poluprečnika.*

IV *Pretpostavlja se da su svi pravi uglovi među sobom podudarni.*

Za dalji razvoj geometrije veoma veliki značaj imao je *peti Euklidov postulat* koji u svom originalu glasi:

V *Ako neka prava presecajući druge dve komplanarne prave obrazuje sa njima sa iste strane dva unutrašnja ugla kojima je zbir manji od zbira dva prava ugla, tada se te dve prave, neograničeno produžene seku sa one strane sečice sa koje je taj zbir uglova manji od zbira dva prava ugla.*



Zbog svoje složenosti u iskazu a i u značenju, mnogi matematičari u kasnijem periodu smatrali su da ovo poslednje tvrđenje ne treba uzimati kao polazno, već da se ono može iz ostalih aksioma i postulata dokazati kao teorema. Zaista, u poređenju sa drugim Euklidovim polaznim tvrđenjima peti postulat je bio znatno složeniji i ovo pitanje zaokupilo je mnoge matematičare u narednih dvadeset vekova, a sve do *XIX* veka taj problem nije bio rešen. U mnogim takvim pokušajima, u dokazu petog postulata korišćena su neka tvrđenja čiji je dokaz izostavljan. Kasnije se pokazalo da se ta tvrđenja ne mogu dokazati iz ostalih aksioma i postulata ako se iz njihovog spiska izostavi peti postulat. Dakle, kao što iz njih sledi peti postulat, tako i ona slede iz petog postulata. (Naravno uz korišćenje preostalih polaznih tvrđenja.) Zbog toga njih zovemo *ekvivalenti petog Euklidovog postulata*. Navešćemo neke primere tih ekvivalenata:

1. *Ako je ABCD četvorougao kod koga su uglovi pri ivici BC pravi, a ivice AB i CD podudarne tada su uglovi kod druga dva temena takođe pravi (Đ. Đ. Sakeri 1667-1733, italijanski matematičar).*
2. *Prava normalna na jedan krak oštrog ugla seče drugi krak.*
3. *Oko svakog trougla može se opisati krug.*
4. *Ako su kod nekog četvorougla tri ugla prava tada je i četvrti ugao prav (J. H. Lambert 1728-1777, francuski matematičar).*
5. *Zbir uglova u trouglu jednak je opruženom uglu (A. M. Ležandr 1752-1833, francuski matematičar).*
6. *Za svaku pravu i tačku van nje u ravni njima određenoj postoji najviše jedna prava koja sadrži tu tačku i disjunktna je sa tom pravom (Dž. Plejfer 1748-1819, engleski matematičar).*

Dakle, koristeći svako od ovih tvrđenja može se dokazati peti postulat, ali vremenom se pokazalo da se ni ona ne mogu dokazati bez petog postulata. Za nas će kasnije od velikog značaja biti Plejferov ekvivalent.

Sledeći prelomni trenutak u razvoju geometrije bio je pojava neeuklidskih geometrija u *XIX* veku. Njihovo otkriće vezuje se za ruskog matematičara *Nikolaja Ivanoviča Lobačevskog* (1792-1856). On je takođe razmatrao problem petog Euklidovog postulata. Polazeći od njegove negacije, odnosno negacije Plejferovog ekvivalentnog tvrđenja, Lobačevski je krenuo od pretpostavke da kroz tačku van neke prave postoje bar dve prave koje su sa njom disjunktne i komplanarne. U želji da dođe do kontradikcije, čime bi peti postulat bio dokazan, izgradio je čitav niz novih tvrđenja. Jedno od njih je npr. da je zbir uglova u trouglu uvek manji od opruženog. Ali ni jedno od njih nije bilo u kontradikciji sa ostalim aksiomama ako se iz spiska isključi peti postulat. To ga je navelo na ideju da je moguće izgraditi jednu potpuno novu geometriju koja je neprotivrečna i koja se bazira na svim Euklidovim aksiomama osim što je peti postulat zamenjen njegovom negacijom. Po njemu danas tu geometriju nazivamo geometrija Lobačevskog. Nezavisno od njega do istih rezultata došao je i mađarski matematičar *Janoš Boljaj* (1802-1860).

Potpunu potvrdu ove ideje o neprotivrečnosti te nove geometrije dao je krajem prošlog veka francuski matematičar *Anri Poenkare* (1854-1912), tek posle smrti Lobačevskog. On je izgradio model na osnovu koga je pokazao da bi eventualna protivrečnost geometrije Lobačevskog značila i protivrečnost euklidske geometrije. Kasnije dolazi do otkrića i drugih neeuklidskih geometrija.

Može nam se učiniti čudnim da se u matematici izučavaju dve teorije, euklidska geometrija i geometrija Lobačevskog koje su u suprotnosti jedna sa drugom. Za modernu matematiku je međutim od najveće važnosti da su obe određene sistemima aksioma koji su neprotivrečni i potpuni. Na pitanje: koja od te dve geometrije važi, nema smisla tražiti odgovor u okviru matematike. Naime, to bi se svodilo na pitanje koje aksiome važe, ali njih prihvatamo bez dokaza. Naravno, pitanje može glasiti kakva je geometrija prostora u fizičkom smislu i kako nju možemo što bolje opisati aksiomama. Radi odgovora na to pitanje potrebna je fizička interpretacija osnovnih geometrijskih pojmova. Npr. pravu je najprirodnije interpretirati kao svetlosni zrak. U tom smislu pokazuje se da fizički prostor nije euklidski. On nije određen ni geometrijom Lobačevskog. Pojavom Ajnštajnove teorije relativiteta (*A. Ajnštajn* (1879-1955), nemački fizičar) početkom ovog veka, pokazalo se da je u kosmičkom prostoru pogodnije koristiti neeuklidsku geometriju sa promenljivom zakrivljenošću. Tako možemo reći, da se geometrija vasione lokalno menja, u zavisnosti od blizine neke mase i njene količine.

Iako je sistem aksioma euklidske geometrije u to vreme, krajem *XIX* i početkom *XX* veka, bio skoro potpuno izgrađen, prvi korektan potpun sistem dao je nemački matematičar *David Hilbert* (1862-1943) u svojoj čuvenoj knjizi *"Osnovi geometrije"* objavljenoj 1899. godine. Veoma sličan sistem aksioma i mi ćemo koristiti u daljnjem izlaganju.

Moramo na kraju istaći da razvoj geometrije ovim nikako nije završen. Naprotiv, nasuprot uobičajenoj predstavi, geometrija i matematika uopšte se u ovom veku razvijaju u još bržem tempu nego ranije. I danas su mnogi problemi u matematici, a u geometriji posebno iz oblasti neeuklidskih geometrija, još uvek otvoreni za rešavanje.

Glava II

Euklidska geometrija

U ovoj glavi počećemo sa aksiomatskim zasnivanjem euklidske geometrije. Kako smo već ranije ustanovili, potrebno je najpre uvesti polazne pojmove i polazna tvrđenja - aksiome.

Neka je $\boldsymbol{S}$ neprazan skup čije ćemo elemente zvati *tačkama* i označavati sa A, B, C, ... Određene podskupove skupa $\boldsymbol{S}$ zvaćemo *pravama* i označavati sa a, b, c, ... a određene podskupove zvaćemo *ravnima* i označavati sa α, β, γ, ... Osim ovih, polazni pojmovi biće i dve relacije na skupu $\boldsymbol{S}$. Prva je troelementna i naziva se relacija *između*. Da su tačke A, B, C u toj relaciji označavaćemo sa $\mathcal{B}(A,B,C)$ i čitati: tačka B je između tačaka A i C. Druga relacija je četvoroelementna i naziva se relacija *podudarnosti parova tačaka*; činjenicu da su tačke A, B, C, D u toj relaciji označavaćemo sa $(A,B)\cong(C,D)$ i čitati: par tačaka (A,B) je podudaran sa parom (C,D).

Pomoću ovih polaznih pojmova uvodimo i naredne izvedene pojmove:

Definicija. Za tri ili više tačaka kaže se da su *kolinearne* ako postoji prava koja ih sadrži. Inače su one *nekolinearne*. Analogno za četiri i više tačaka kaže se da su *komplanarne* ako postoji ravan koja ih sadrži. Inače su one *nekomplanarne*. Za dve ili više pravih kaže se da su *komplanarne* ako postoji ravan koja ih sadrži. Inače su one *nekomplanarne*.

Definicija. Dve prave se *seku* ako je njihov presek jedna tačka. Prava i ravan se *seku* ako je njihov presek jedna tačka. Dve razne ravni se *seku* ako njihov presek nije prazan skup.

Definicija. Proizvoljan neprazan podskup skupa ***S*** naziva se *figura*. Figura je *ravna* ako postoji ravan čiji je ona podskup. Ceo skup ***S*** zvaćemo *prostor*.

U svakoj od prethodnih definicija uveli smo po nekoliko pojmova, radi kraćeg zapisa. U daljem tekstu ćemo nekad izostavljati i samu reč "definicija" ali će novi izvedeni pojmovi uvek biti pisani iskošenim slovima.

Sada ćemo uvesti i osnovna tvrđenja - aksiome. Po svojoj prirodi njih delimo u pet grupa:

I Aksiome incidencije. (osam aksioma)

II Aksiome rasporeda. (šest aksioma)

III Aksiome podudarnosti. (sedam aksioma)

IV Aksioma neprekidnosti. (jedna aksioma)

V Aksioma paralelnosti. (jedna aksioma)

2.1 Aksiome incidencije

Kako prave i ravni, kao polazni pojmovi predstavljaju odgovarajuće skupove tačaka, među tačkama pravama i ravnima mogu se razmatrati odgovarajuće skupovne relacije: $\in$ i $\subset$. Te relacije zvaćemo *relacije incidencije*. Dakle u slučaju kada tačka pripada nekoj pravoj ili kada je prava podskup neke ravni, rećećemo i da su tačka i prava, odnosno prava i ravan *incidentne*. Aksiome ove grupe opisuju osnovne karakteristike upravo tih relacija:

I_1 *Za svake dve razne tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži.*

I_2 *Svaka prava sadrži bar dve tačke.*

I_3 *Za svake tri tačke postoji bar jedna ravan koja ih sadrži.*

I_4 *Za svake tri nekolinearne tačke postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži.*

I_5 *Svaka ravan sadrži bar tri tačke.*

I_6 *Ako dve razne tačke neke prave pripadaju nekoj ravni tada i sve tačke te prave pripadaju toj ravni.*

I_7 Ako su dve ravni incidentne sa nekom tačkom, tada su one incidentne sa bar još jednom tačkom.

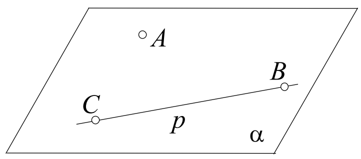
I_8 Postoje četiri nekomplanarne tačke.

Na osnovu aksiome I_1, svaka prava određena je sa dve svoje razne tačke. Tako ćemo pravu p određenu tačkama A i B zvati i prava AB, a označavati sa $p(A,B)$. Analogno, ravan α određenu nekolinearnim tačkama A, B, C zvaćemo i ravan ABC, a označavati sa $\alpha(A,B,C)$.

U slučaju kad za pravu p i ravan α važi $p\subset\alpha$, rećićemo takođe, da prava p pripada ravni α ili da ravan α sadrži pravu p, iako je p skup pa bismo morali koristiti reč "podskup" umesto reči "pripada". Ali ovaj način izražavanja je standardan u geometriji, pa ga zato i ovde koristimo.

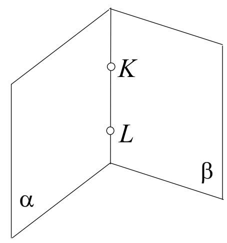
Izvedimo neka tvrđenja kao prve posledice aksioma incidencije:

Teorema I_1. Ako tačka A ne pripada pravoj p tada postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačku A i pravu p.



Dokaz: Prema aksiomi I_2, prava p sadrži bar dve tačke, označimo ih sa B i C. Ako bi tačke A, B, C bile kolinearne one bi pripadale jednoj pravoj. Međutim, na osnovu aksiome I_1, tačke B i C određuju jedinstvenu pravu i to je dakle prava p. Ali tada bi tačka A pripadala pravoj p što je isključeno u iskazu teoreme. Dakle, tačke A, B, C su nekolinearne pa, na osnovu aksiome I_4, postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži, označimo je sa α. Kako tačke B i C prave p pripadaju ravni α to, na osnovu aksiome I_6, i sve tačke prave p pripadaju toj ravni. Dakle, ravan α sadrži tačku A i pravu p. Dokažimo još da je takva ravan jedinstvena. Ako neka ravan β sadrži tačku A i pravu p, tada ona sadrži tačke A, B, C pa se, na osnovu aksiome I_4, ne može razlikovati od α. ❑

Teorema I_2. Ako dve razne ravni imaju zajedničku tačku tada je njihov presek prava.



Dokaz: Neka dve razne ravni α i β imaju zajedničku tačku K. Tada one, prema aksiomi I_7, imaju bar još jednu zajedničku tačku, označimo je sa L. Prema aksiomi I_1, tačke K i L određuju pravu KL, čije sve tačke, na osnovu I_6, pripadaju ravnima α i β pa time i njihovom preseku. Dokažimo još da van prave KL nema drugih presečnih tačaka ravni α i β. Zaista ako bi zajednička tačka M ravni α i β bila van prave KL, tada bi na osnovu prethodne teoreme postojala jedinstvena ravan koja sadrži tačku M i pravu KL. To, međutim, nije moguće, jer su po pretpostavci α i β razne ravni. Dakle, presek ravni α i β je prava KL. ❑

Definicija. Prave p i q su *mimoilazne* ako ne postoji ravan koja ih sadrži tj. ako su nekomplanarne. *

Navedimo sada jedan jednostavan model u kome su ispunjene sve aksiome incidencije. Skup $\boldsymbol{S}$ sastoji se od samo četiri elementa, tj. četiri tačke: $\boldsymbol{S}=\{A,B,C,D\}$. Svi mogući tročlani podskupovi predstavljaju ravni u ovom modelu, a svi dvočlani podskupovi prave. Lako je proveriti da su sve aksiome u ovakvoj interpretaciji zadovoljene. Tako, na primer, svake dve ravni imaju tačno dve zajedničke tačke pa je time aksioma I_7 ispunjena. Jasno je, međutim, da u ovakvoj geometriji postoje samo četiri ravni, svaka prava ima samo po dve tačke itd., što ne odgovara našoj ideji prostora, u kome ima beskonačno mnogo tačaka. Ali ovaj model pokazuje da samo na osnovu aksioma incidencije i ne možemo dokazati da postoji više od četiri tačke. Takođe, još nismo u mogućnosti da uvedemo pojmove kao što su: poluprava, trougao, kvadrat, krug, itd. Za to su potrebne nove aksiome.

Zadaci

1. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke, dokazati da su svake dve od te tri tačke različite.
2. Dokazati da postoje bar tri nekolinearne tačke.

3. Ako su *p*, *q*, *r* tri razne prave od kojih se svake dve prave seku, ali ne postoji tačka koja pripada svim trima pravama, dokazati da su *p*, *q*, *r* komplanarne.
4. Dokazati da za svake dve prave koje se seku postoji jedinstvena ravan koja ih sadrži.
5. Dokazati da mimoilazne prave nemaju zajedničkih tačaka.
6. Ako su *p* i *q* mimoilazne prave i *A* tačka van njih, dokazati da ne postoji više od jedne prave koja sadrži tačku *A* i seče prave *p* i *q*.
7. Dokazati da postoje prava i ravan koje se seku.

2.2 Aksiome rasporeda

Ove aksiome opisuju osnovne karakteristike relacije "između" koju smo već uveli kao osnovni pojam.

II_1 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada su A, B, C tri razne kolinearne tačke.

II_2 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada je i $\mathcal{B}(C,B,A)$.

II_3 Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ tada nije $\mathcal{B}(A,C,B)$.

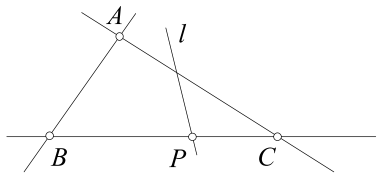
II_4 Za svake dve tačke A, B na pravoj AB postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A,B,C)$.

II_5 Ako su A, B, C tri razne kolinearne tačke tada važi bar jedna od relacija: $\mathcal{B}(A,B,C)$, $\mathcal{B}(A,C,B)$, $\mathcal{B}(C,A,B)$.

II_6 (Pašova[1] aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i l prava ravni ABC koja ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B,P,C)$, tada prava l seče ili pravu AC u tački Q

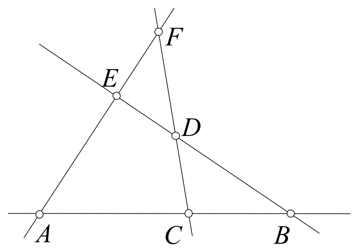
[1] *M. Paš* (1843-1930), nemački matematičar, uveo je raspored tačaka aksiomatski u svojim *"Predavanjima o novijoj geometriji"* iz 1882. g. Kasnije su to upotpunili italijanski matematičar *Đ. Peano* (1858-1932), u *"Načelima geometrije"*, a zatim nemački matematičar *D. Hilbert* (1862-1943) u svojoj čuvenoj knizi *"Osnovi geometrije"* iz 1899 g.

takvoj da je $\mathcal{B}(A,Q,C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A,R,B)$.



Cilj našeg izlaganja neće biti da detaljno izvedemo sve posledice aksioma rasporeda. Za razliku od posledica prethodne grupe aksioma ovde bi njihovo izvođenje bilo veoma složeno. Tako ćemo se zadržati samo na jednostavnijim posledicama, dok ćemo neke složenije samo navesti bez dokaza. *

Teorema II_1. Za svake dve razne tačke A i B postoji tačka C takva da je: $\mathcal{B}(A,C,B)$.

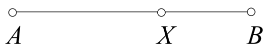


Dokaz: Na osnovu posledice prve grupe aksioma postoje nekolinearne tačke. Postoji dakle bar jedna tačka van prave AB, označimo je sa D. Sada, prema aksiomi II_4, postoji tačka E takva da je $\mathcal{B}(B,D,E)$ i zatim tačka F takva da je $\mathcal{B}(A,E,F)$. A, B, E su nekolinearne tačke, jer bi inače tačka D bila na pravoj AB. Takođe, prava FD ne sadrži tačku A, jer bi u suprotnom tačke F, D, A, E bile kolinearne, pa time i tačka B sa njima. To nije moguće jer opet vodi zaključku da tačka D pripada pravoj AB. Dalje, tačke D i F pripadaju ravni ABE pa i prava FD. Sada možemo primeniti Pašovu aksiomu na tačke A, B, E i pravu FD. Naime prava FD seče pravu EB u tački D takvoj da je $\mathcal{B}(B,D,E)$ pa ona seče pravu AE u tački F takvoj da je $\mathcal{B}(A,F,E)$ ili pravu AB u nekoj tački C takvoj da je $\mathcal{B}(A,C,B)$. Ali na osnovu prethodne teoreme kako je $\mathcal{B}(A,E,F)$ ne može biti i $\mathcal{B}(A,F,E)$. Dakle, prava FD seče pravu AB u nekoj tački C takvoj da je $\mathcal{B}(A,C,B)$. ❑

Sada smo u mogućnosti da uvedemo niz novih pojmova:

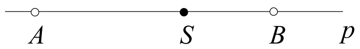
Definicija. Neka su A i B dve razne tačke. Skup svih tačaka X takvih da je $\mathcal{B}(A,X,B)$ naziva se *otvorena duž AB* u oznaci (AB).

Definicija. Unija otvorene duži AB i tačaka A i B naziva se *zatvorena duž* u oznaci $[AB]$. Tačke A i B su njene *krajnje tačke*.



Kako ćemo od sada koristiti uglavnom pojam zatvorene duži, nadalje ćemo zatvorenu duž nazivati kraće *duž*.

Definicija. Neka su A, B, S tačke neke prave p i A, B različite od S. Kažemo da su tačke A i B *sa raznih strana tačke* S u oznaci $A,B \div S$ ako je $\mathcal{B}(A,S,B)$ a da su inače *sa iste strane tačke* C u oznaci $A,B \dot{-} S$.

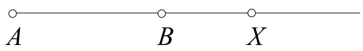


U vezi sa prethodnom relacijom, iskažimo jednu teoremu koju nećemo dokazivati.

Teorema II_2**.** Relacija "sa iste strane tačke" je relacija ekvivalencije.

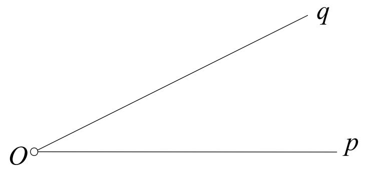
Čitaocu preporučujemo da dokaže refleksivnost i simetričnost. Tranzitivnost je nešto složenija za dokazivanje.

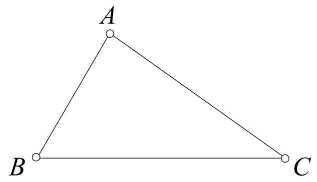
Definicija. Neka su A i B dve razne tačke. Skup svih tačaka X takvih da su $B,X \dot{-} A$ uključujući i tačku A naziva se *poluprava AB* sa *početnom tačkom A* i označava se sa $(AB$.



Na osnovu definicija poluprave i relacije sa iste strane tačke jasno je da je poluprava podskup prave. Naime tačka X iz prethodne definicije mora biti kolinearna sa A i B. Dalje bismo mogli dokazati da je svaka tačka neke prave početna za tačno dve poluprave na toj pravoj; zatim, da je unija te dve poluprave prava, itd. To sve, međutim, nećemo ovde činiti. Napomenimo samo da bismo u dokazima koristili prethodnu teoremu. Pokazuje se naime, da su odgovarajuće dve poluprave bez početne tačke dve klase ekvivalencije relacije sa iste strane tačke na nekoj pravoj.

Definicija. Unija dve različite poluprave p i q sa zajedničkim početkom O naziva se *ugaona linija*, sa *temenom O* u oznaci pq.



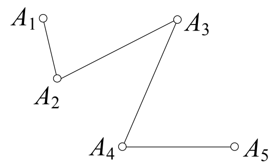


Definicija. Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke unija $[AB]\cup[BC]\cup[CA]$ naziva se *trougao ABC* i označava sa ΔABC. Tačke A, B, C su *temena*, a duži AB, BC, CA *ivice* ili *stranice* tog trougla.

Sada pomoću pojma trougla Pašovu aksiomu možemo iskazati u zgodnijem obliku:

Teorema II_3. Ako prava koja je u ravni trougla ABC ne sadrži ni jedno od temena A, B, C i seče jednu njegovu ivicu, tada ona seče tačno još jednu njegovu ivicu.

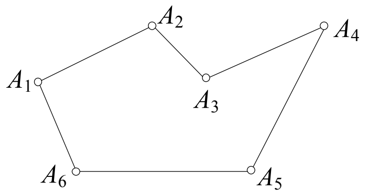
Dokaz: Direktno na osnovu Pašove aksiome i definicije trougla. ❑

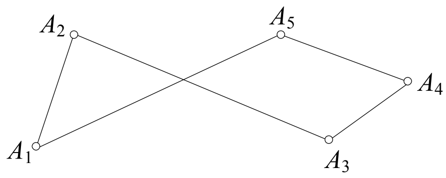


Definicija. Ako su A_1, A_2, ... , A_n tačke neke ravni, od kojih nikoje tri susedne u nizu nisu kolinearne, unija $[A_1A_2]\cup[A_2A_3]\cup... \cup[A_{n-1}A_n]$ naziva se *poligonalna linija* ili *ravna izlomljena linija* $A_1A_2...A_n$. Tačke A_1, A_2, ... , A_n su *temena* a duži A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$ njene *ivice* ili *stranice*. A_1 i A_n su njene *krajnje tačke*.

Dve ivice poligonalne linije sa zajedničkim temenom zovu se *susedne* ivice. Ako ivice poligonalne linije nemaju drugih zajedničkih tačaka, sem što susedne imaju zajedničko teme, za poligonalnu liniju kažemo da je *prosta*.

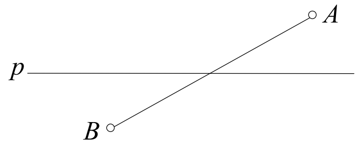
Definicija. Poligonalna linija $A_1A_2...A_{n+1}$ ($n\geq 3$) kod koje susedne ivice ne pripadaju istoj pravoj i kod koje se krajnje tačke poklapaju (tj. $A_1=A_{n+1}$) naziva se *mnogougao* ili *poligon*. Mnogougao sa n temena A_1, A_2, ... , A_n koja su sva različita naziva se *n-tougao* $A_1A_2...A_n$. Duži čije su krajnje tačke A_1, A_2, ..., A_n, a nisu ivice, zovu se *dijagonale* tog n-tougla.

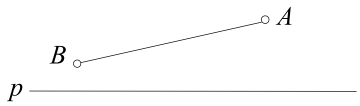


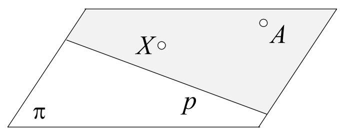


Jasno je da se pojam trougla uklapa u ovu opštu definiciju za n=3. Inače mnogougao je *prost* ako je odgovarajuća poligonalna linija prosta.

Definicija. Neka su A, B dve tačke i p prava neke ravni pri čemu $A,B \notin p$. Kažemo da su tačke A i B *sa raznih strana prave* p u oznaci $A,B \div p$ ako duž AB seče pravu p. Inače su A i B *sa iste strane prave* p u oznaci $A,B \ddot{-}\, p$.



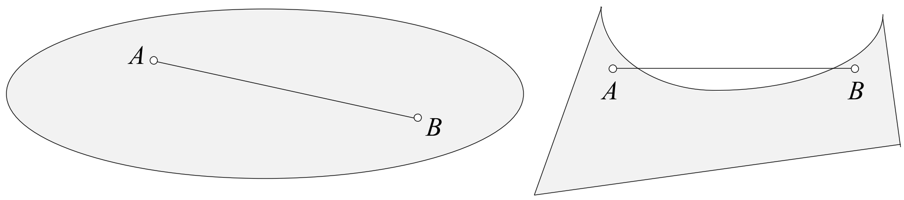




Definicija. Neka je p prava neke ravni π i A tačka te ravni van prave p. Skup svih tačaka X ravni takvih da je $A,X \ddot{-}\, p$, zajedno sa tačkama prave p naziva se *poluravan* sa *graničnom* (*početnom* ili *rubnom*) pravom p u oznaci $(pA$. Ako je prava p određena tačkama B i C, tu poluravan označavaćemo i sa $(BCA$.

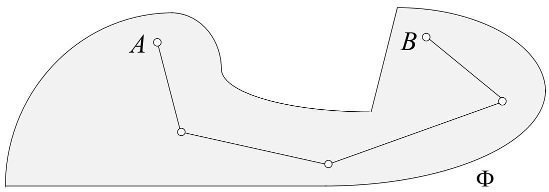
Pomoću pojmova duži i poligonalne linije, možemo uvesti još neke pojmove:

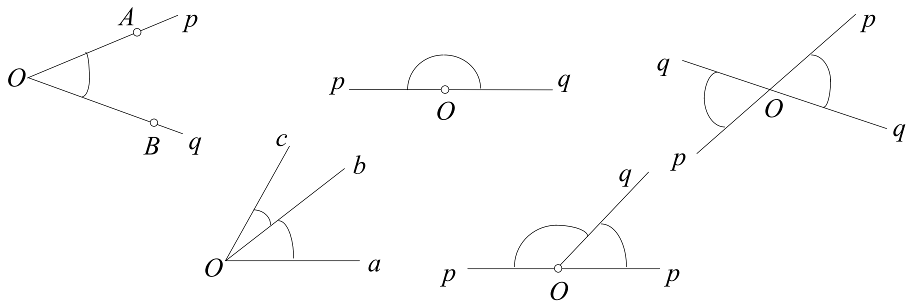
Definicija. Figura Φ je *konveksna* ako za svake dve tačke A i B te figure važi: $[AB] \subset \Phi$. Inače je figura *nekonveksna*.



Lako se dokazuje da su ravan, prava, poluravan konveksne figure.

Definicija. Podskup Φ prostora ***S*** je *povezan skup* ili *oblast* ako za svake dve tačke skupa Φ postoji poligonalna linija čije su one krajnje tačke, a koja je podskup skupa Φ.

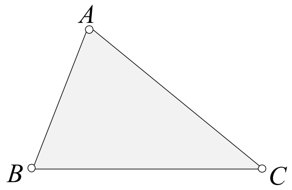


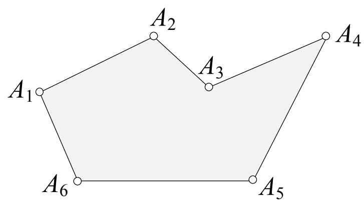


Na osnovu definicije jasno je da je svaki konveksan skup ujedno povezan. Zaista poligonalna linije iz definicije je u tom slučaju uvek duž. Obratno naravno ne važi; povezan skup ne mora biti konveksan.

Može se dokazati, ali ne tako jednostavno, da ugaona linija u ravni kojoj pripada određuje dve oblasti. Uniju svake od tih oblasti sa ugaonom linijom zovemo *ugao*. Ako je pq ugaona linija sa temenom O, ugao njom određen zvaćemo ugao pq i označavamo sa $\angle pOq$ ili $\angle pq$. Ako poluprave p i q ne pripadaju istoj pravoj konveksni ugao pq označavaćemo i sa $\angle AOB$; gde su A i B proizvoljne tačke na polupravama p i q redom, različite od tačke O. Poluprave p i q zovu se *kraci* a tačka O *teme* tog ugla. Ako poluprave p i q pripadaju jednoj pravoj i $p \neq q$, ugao je *opružen*. Ukoliko se ne radi o opruženom uglu ugaona linija određuje dva ugla od kojih je jedan konveksan a drugi nekonveksan. Dva ugla su *susedna* ako imaju jedan zajednički krak. Susedni uglovi čija druga dva kraka određuju opruženi ugao nazivaju se *naporedni* uglovi. Uglovi $\angle pOq$ i $\angle p'Oq'$ su *unakrsni* ako im po dva kraka određuju dva opružena ugla i presek im je tačka O.

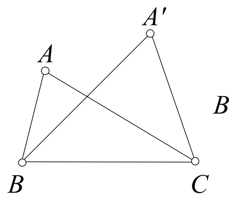
Slično kao za ugaonu liniju, može se dokazati da trougao u ravni kojoj pripada određuje dve oblasti. Jedna je konveksna a druga nekonveksna. Konveksnu oblast zovemo *unutrašnja oblast trougla* a onu drugu *spoljašnja oblast trougla*. *Trougaona površ* je unija trougla i njegove unutrašnje oblasti. Trougaona površ može se definisati i kao presek poluravni: $(BCA$, $(ACB$, $(ABC$. Uglovi $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$ zovu se *unutrašnji uglovi* trougla ABC.

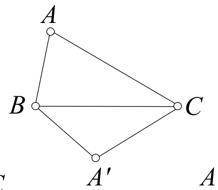


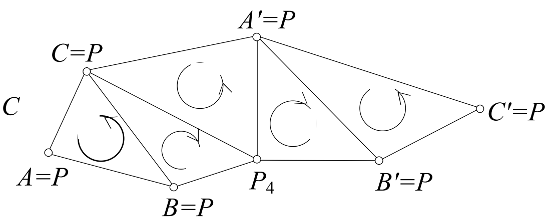


Može se dalje dokazati da mnogougao, ukoliko je prost, određuje u ravni kojoj pripada dve oblasti. *Unutrašnja oblast mnogougla* je ona koja ne sadrži nijednu pravu. Uniju mnogougla i njegove unutrašnje oblasti zovemo *mnogougaona površ*.

Već na ovom mestu moguće je uvesti orijentaciju ravni. Najpre, trougao ABC kod koga su temena uređena trojka (A,B,C) zvaćemo *orijentisanim*. Rećićemo da su orijentisani trouglovi ABC i BCA' jedne ravni *iste orijentacije* ako je $A,A' \dot{-} BC$ i *suprotne orijentacije* ako je $A,A' \div BC$. Ubuduće kada budemo razmatrali orijentaciju nekih trouglova podrazumevaćemo da su to orijentisani trouglovi. Trouglovi ABC i $A'B'C'$ neke ravni su *isto orijentisani* ako postoji niz trouglova: $\Delta ABC = \Delta P_1P_2P_3$, $\Delta P_2P_3P_4$, ... , $\Delta P_{n-2}P_{n-1}P_n = \Delta A'B'C'$ te ravni, u kome je, među susednim







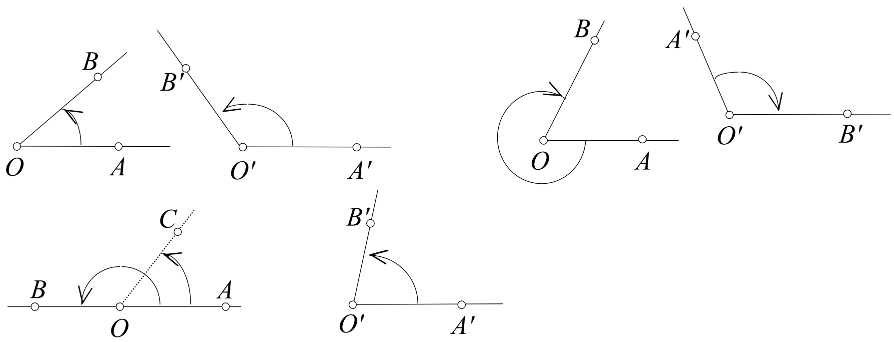
članovima, paran broj puta promenjena orijentacija.

Može se dokazati da je relacija iste orijentacije trouglova u ravni relacija ekvivalencije sa dve klase. Za dva trougla koji nisu u istoj klasi kažemo da su *suprotno orijentisani*. Svaka od te dve klase ekvivalencije određuje orijentaciju ravni. Intuitivno, jedna je "u smeru kazaljke na satu" - nju ćemo zvati *negativna orijentacija ravni* a onu drugu *pozitivna orijentacija ravni*.

Može se uvesti i orijentacija među uglovima neke ravni. Dva ugla pOq i $p'O'q'$ neke ravni ($A\in p$, $B\in q$, $A'\in p'$, $B'\in q'$), od kojih nijedan nije opružen, su isto orijentisani ako su:

* oba konveksna ili oba nekonveksna i ΔAOB, $\Delta A'O'B'$ isto orijentisani;
* jedan konveksan i jedan nekonveksan i ΔAOB, $\Delta A'O'B'$ suprotno orijentisani;

Ako je $\angle pOq$ opružen, on je isto orijentisan kao $\angle p'O'q'$ ako postoji tačka C u uglu pOq tako da su $\angle AOC$ i $\angle p'O'q'$ isto orijentisani. Slično možemo postupiti i kada su oba ugla opružena.



Zadaci

1. Ako prava neke ravni, seče dijagonalu nekog četvorougla te ravni i ne sadrži ni jedno njegovo teme, dokazati da ona seče tačno dve ivice tog četvorougla.
2. Ako su P, Q, R unutrašnje tačke ivica BC, AC, AB nekog trougla, dokazati da su one nekolinearne.

3. Ako su A, B, C, D četiri kolinearne tačke i ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(B,C,D)$ dokazati da je tada i $\mathcal{B}(A,B,D)$.
4. Dokazati da je poluravan konveksna figura.
5. Dokazati da u prostoru postoji više od četiri tačke.
6. Definisati unutrašnje uglove mnogougla.

2.3 Aksiome podudarnosti

Aksiome podudarnosti opisuju osnovne karakteristike relacije podudarnosti parova tačaka. Prisetimo se, tu relaciju smo takođe uveli kao polazni pojam. Napomenimo da se ovde još ne radi o podudarnosti duži, iako nas na to intuitivno podseća. Podudarnost duži kao i podudarnost figura uopšte uvešćemo tek kasnije, u narednoj glavi.

III_1 *Ako je* $(A,B)\cong(C,D)$ *i* $A=B$, *tada je i* $C=D$.

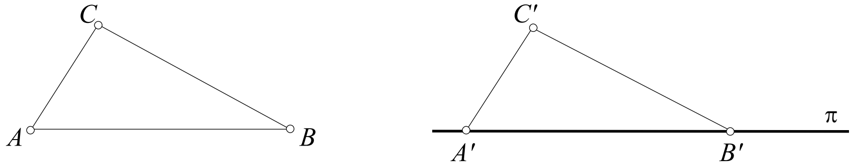
III_2 *Za svake dve tačke A i B je* $(A,B)\cong(B,A)$.

III_3 *Ako je* $(A,B)\cong(C,D)$ *i* $(A,B)\cong(E,F)$ *tada je i* $(C,D)\cong(E,F)$.

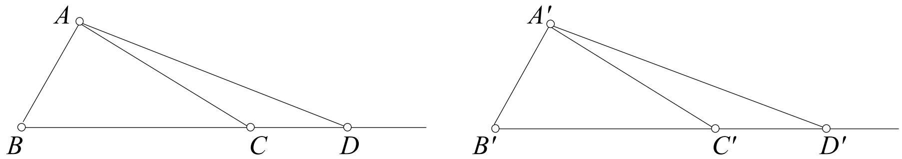
III_4 *Ako su C i C' tačke otvorenih duži AB i A'B', takve da je* $(A,C)\cong(A',C')$ *i* $(B,C)\cong(B',C')$, *tada je i* $(A,B)\cong(A',B')$.

III_5 *Ako su A i B dve tačke i CX poluprava tada na toj polupravoj postoji tačka D takva da je* $(A,B)\cong(C,D)$.

III_6 *Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A'B' tačke ruba neke poluravni* π, *takve da je* $(A,B)\cong(A',B')$, *tada u toj poluravni postoji jedinstvena tačka C' takva da je* $(A,C)\cong(A',C')$ *i* $(B,C)\cong(B',C')$.



III_7 Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D i D' tačke polupravih BC i B'C' takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, $(B,C)\cong(B',C')$, $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,D)\cong(B',D')$, tada je i $(A,D)\cong(A',D')$.



Navedimo neke posledice aksioma podudarnosti:

Teorema III_1 . Relacija podudarnosti parova tačaka je relacija ekvivalencije.

Dokaz: Na osnovu aksiome III_2, za svake dve tačke B i A je $(B,A)\cong(A,B)$. Kako je sada: $(B,A)\cong(A,B)$ i $(B,A)\cong(A,B)$ to je, na osnovu III_3, $(A,B)\cong(A,B)$. Dakle, relacija je refleksivna.
Neka je $(A,B)\cong(C,D)$. Na osnovu prethodnog je i $(A,B)\cong(A,B)$. Sada, primenom III_3, dobijamo $(C,D)\cong(A,B)$, pa je relacija i simetrična.
Dokažimo još tranzitivnost. Neka je $(A,B)\cong(C,D)$ i $(C,D)\cong(E,F)$, potrebno je dokazati da je $(A,B)\cong(E,F)$. Ali na osnovu dokazane simetričnosti je $(C,D)\cong(A,B)$, pa tražena relacija sledi na osnovu aksiome III_3. ❑

Kao što smo već napomenuli, relaciju podudarnosti figura uvešćemo kasnije i ona će biti predmet proučavanja u narednoj glavi. Prirodno je da ćemo se tom prilikom pozivati upravo na ovu grupu aksioma i njene posledice; između ostalog i na dve naredne teoreme koje ćemo ovde dati bez dokaza.

Teorema III_2 . Ako su A i B dve tačke i CX poluprava tada na toj polupravoj postoji jedinstvena tačka D takva da je $(A,B)\cong(C,D)$.

***Teorema III_3* .** Ako su A, B, C tri razne tačke prave p i A',B' dve tačke prave p' takve da je $(A,B)\cong(A',B')$, tada postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A,C)\cong(A',C')$ i $(B,C)\cong(B',C')$. Pri tome, tačka C' pripada pravoj p' i:

(*i*) ako je $\mathcal{B}(A,C,B)$, tada je $\mathcal{B}(A',C',B')$.

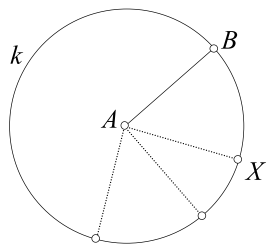
(*ii*) ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada je $\mathcal{B}(A',B',C')$.

(*iii*) ako je $\mathcal{B}(C,A,B)$, tada je $\mathcal{B}(C',A',B')$.

Navešćemo još i dve definicije:

Definicija. Kažemo da je uređena n-torka tačaka $(A_1,A_2,...,A_n)$ *podudarna* sa
n-torkom $(A'_1,A'_2,...,A'_n)$ u oznaci $(A_1,A_2,...,A_n)\cong(A'_1,A'_2,...,A'_n)$ ako je za svako $i,k\in\{1,2,...,n\}$ $(A_i,A_k)\cong(A'_i,A'_k)$.

Definicija. Neka su A i B dve razne tačke neke ravni α. Skup svih tačaka X te ravni takvih da je $(A,B)\cong(A,X)$, naziva se *krug*, u oznaci $k(A,AB)$, sa *centrom A* i čiji je *poluprečnik* duž AB.



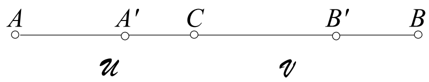
Iz same definicije, na osnovu tranzitivnosti relacije podudarnosti parova tačaka, jasno je da proizvoljna tačka kruga sa njegovim centrom određuje poluprečnik tog kruga.

Već na ovom mestu, mogu se na jednostavan način uvesti pojmovi kao što su *tangenta*, *sečica* i *tetiva* kruga, *unutrašnja oblast kruga* i slično, ali njih ćemo definisati tek u trećoj i u petoj glavi.

Može nam se učiniti da su dosadašnje tri grupe aksioma dovoljne za izvođenje svih teorema u euklidskoj geometriji. To, međutim, nije tako. Prisetimo se na primer problema petog Euklidovog postulata. Takođe, za sada nismo u mogućnosti da dokažemo sledeće tvrđenje koje nam na prvi pogled može izgledati jednostavno: ako je p prava a k krug neke ravni i ako je bar jedna tačka prave p u unutrašnjosti kruga k tada p i k imaju bar jednu zajedničku tačku. Ali upravo je ta "očiglednost" razlog što su mnogi u istoriji geometrije previđali potrebu dokazivanja ovog i sličnih tvrđenja.

2.4 Aksioma neprekidnosti

IV_1 (Dedekindova[2] aksioma) Neka je otvorena duž AB razložena na uniju dva disjunktna neprazna podskupa $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$. Ako nijedna tačka iz skupa $\mathcal{U}$ nije između neke dve dve tačke skupa $\mathcal{V}$ i nijedna tačka iz skupa $\mathcal{V}$ nije između neke dve tačke skupa $\mathcal{U}$, tada postoji jedinstvena tačka C otvorene duži AB takva da je $\mathcal{B}(A',C,B')$ za svako
$A' \in \mathcal{U} \setminus \{C\}$ i svako $B' \in \mathcal{V} \setminus \{C\}$.



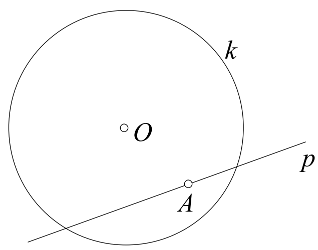
Nećemo se zadržavati na posledicama ove aksiome. Napominjemo da su dokazi tih posledica veoma složeni[3]. Navešćemo samo dve teoreme bez dokaza. U iskazima tih teorema pominju se pojmovi unutrašnjih i spoljašnjih tačaka kruga koje ćemo, kao što smo već istakli, uvesti kasnije.

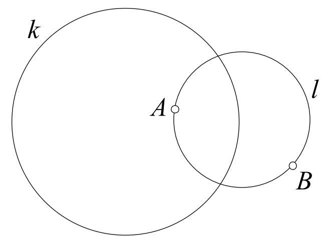
***Teorema IV_1*.** Ako su p prava i k krug neke ravni i ako je bar jedna tačka prave p u unutrašnjosti kruga k tada p i k imaju bar jednu zajedničku tačku.

***Teorema IV_2*.** Ako su k i l dva kruga neke ravni takvi da l ima i unutrašnjih i spoljašnjih tačaka kruga k, tada krugovi k i l imaju bar jednu zajedničku tačku.

[2] *R. Dedekind* (1831-1916), nemački matematičar.

[3] Sve do *XIX* veka matematičari nisu osetili potrebu dokazivanja ovih tvrđenja, kao ni potrebu uvođenja aksioma neprekidnosti. Sam *Euklid iz Aleksandrije* (*III* v. pre n. e.) u svojim *"Elementima"*, navodi konstrukciju pravilnog trougla, u kojoj ne dokazuje da se odgovarajući krugovi seku.





Inače, Dedekindova aksioma se koristi, u nešto drugačijem obliku, kod zasnivanja skupa realnih brojeva. To ukazuje da je moguće izvršiti poznatu obostrano jednoznačnu korespondenciju između skupa tačaka neke prave i skupa realnih brojeva.

2.5 Aksioma paralelnosti (Plejferova aksioma)

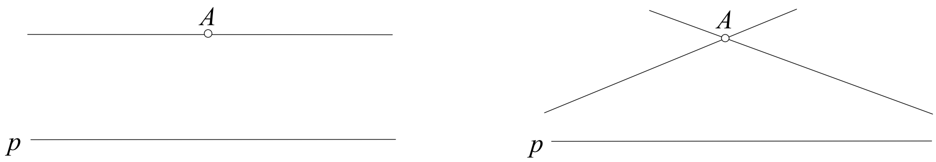
Postavimo sada sledeće pitanje: ako prava p i tačka A van te prave određuju ravan α, koliki je broj pravih te ravni koje sadrže tačku A a disjunktne su sa pravom p? Intuitivno, naravno jedna. Nas, međutim, zanima šta možemo dokazati na osnovu dosadašnjih aksioma. Na osnovu samo prve četiri grupe aksioma može se dokazati da postoji bar jedna takva prava, ali da ih nema više nije moguće dokazati. Prirodan je zaključak da moramo uvesti aksiomu na osnovu koje bismo se "odlučili" da li je taj broj jedan ili možda veći. Postoje dve mogućnosti:

V_1. (Plejferova[4] aksioma)
Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku A i disjunktna je sa pravom p.

V_1'. (Aksioma Lobačevskog[5])
Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada u ravni njima određenoj postoje bar dve prave koje sadrže tačku A i disjunktne su sa pravom p.

---

[4] *Dž. Plejfer* (1748-1819), engleski matematičar.
[5] *N. I. Lobačevski* (1792-1856), ruski matematičar.



Tako dolazimo do dve geometrije od kojih je svaka neprotivrečna. Prvu, određenu sa aksiomama prve četiri grupe i aksiomom V_I, zovemo *euklidska*[6] *geometrija*. Drugu određenu sa aksiomama prve četiri grupe i aksiomom V_I'. zovemo *geometrija Lobačevskog* ili *hiperbolička geometrija*. Iako su očigledno različite ove dve geometrije imaju dosta zajedničkog. To je, naravno, zbog toga što obe sadrže iste prve četiri grupe aksioma, a razlikuju se samo u petoj. Dakle, posledice prve četiri grupe aksioma, a samo njih smo do sada razmatrali, važe kako u euklidskoj geometriji, tako i u geometriji Lobačevskog. Međutim, u geometriji Lobačevskog, a to je posledica aksiome V_I', zbir uglova u trouglu uvek je manji od zbira dva prava ugla i nije konstantan; zatim ne može se oko svakog trougla opisati krug, itd. Naravno ovi iskazi nam se mogu učiniti kontradiktorni, ali se oni ne mogu opovrgnuti bez uvođenja aksiome V_I, tj. oni ne važe tek u euklidskoj geometriji. Inače, geometrija zasnovana samo na aksioma prve četiri grupe naziva se *apsolutna geometrija*. Ona određuje zajednička svojstva dve pomenute geometrije. Osim ovih postoji i geometrija u kojoj se svake dve prave neke ravni seku. To je tzv. *Rimanova*[7] ili *eliptička geometrija*. Ali ona se, što je jasno iz prethodnog razmatranja, ne može zasnivati na aksioma prve četiri grupe, pa se u tom smislu razlikuje od euklidske geometrije i geometrije Lobačevskog.

Mi ćemo se baviti samo euklidskom geometrijom. Stoga pređimo na razmatranje posledica aksiome V_I. Inače, ceo skup $\boldsymbol{S}$ (skup svih tačaka) zvaćemo sada *euklidski prostor* i označavati sa E^3; sve ravni zvaćemo *euklidske ravni* i označavati E^2, a sve prave *euklidske prave* u oznaci E^1. Uvedimo sada relaciju paralelnosti pravih:

Definicija. Prave p i q su *paralelne* u oznaci $p\|q$ ako su komplanarne i disjunktne ili je $p=q$.

---

[6] *Euklid iz Aleksandrije* (*III* v. pre n. e.), starogrčki matematičar.

[7] *B. Riman* (1826-1866), nemački matematičar.

Sada Plejferovu aksiomu možemo iskazati i u sledećem obliku:

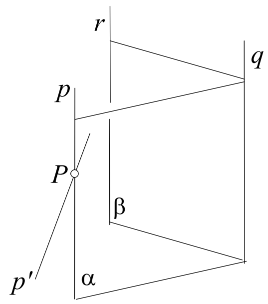
Teorema V_1. Za svaku tačku A i svaku pravu p postoji jedinstvena prava q takva da je $q \| p$ i $q \ni A$.

Dokaz: Ako tačka A pripada pravoj p, tada je p jedina takva prava. Ako tačka A ne pripada pravoj p, tada na osnovu Plejferove aksiome postoji jedinstvena prava u ravni njima određenoj koja sadrži tačku A i disjunktna je sa pravom p. Tj. jedinstvena prava koja sadrži tačku A i paralelna je sa p. ❑

Teorema V_2. Relacija paralelnosti pravih je relacija ekvivalencije.

Dokaz: Relacija je refleksivna i simetrična direktno na osnovu definicije. Ostaje da se dokaže tranzitivnost. Neka za neke tri prave p, q, r važi $p \| q$ i $q \| r$. Potrebno je dokazati da je $p \| r$. Kako je $p \| q$ i $q \| r$ to su osnovu definicije prave p i q komplanarne i takođe prave q i r komplanarne. Označimo sa α ravan određenu pravama p i q i sa β ravan određenu pravama q i r.

Razmotrimo najpre slučaj kad je $\alpha=\beta$. Ako je $p=q$ ili $q=r$, tada je jasno $p \| r$. Neka je $p \neq q$ i $q \neq r$. Prave p i r ne mogu se seći jer bi tada u ravni α postojale dve prave koje se seku i disjunktne su sa pravom q a to je u suprotnosti sa Plejferovom aksiomom.

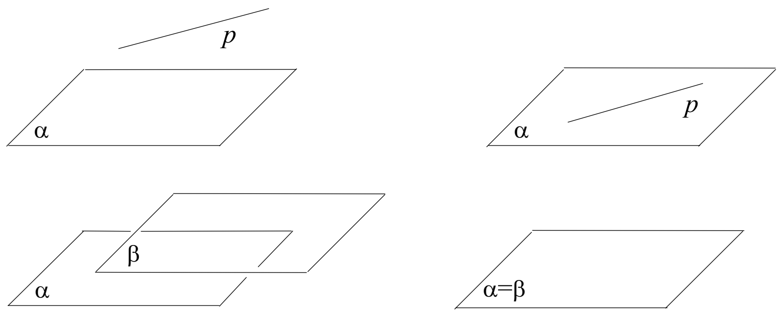


Neka je sada $\alpha \neq \beta$. U tom slučaju je naravno $p \neq q$ i $q \neq r$ pa je $p \cap q = \emptyset$ i $q \cap r = \emptyset$. Da dokažemo da je $p \| r$ dovoljno je dokazati da su p i r disjunktne i komplanarne. Ako bi se prave p i r sekle u nekoj tački S, ona bi s pravom q određivala jedinstvenu ravan pa bi bilo $\alpha=\beta$. Dakle, $p \cap r = \emptyset$. Dokažimo još da su prave p i r komplanarne. Neka je P proizvoljna tačka prave p. Tada tačka P i prava r određuju neku ravan, označimo je sa γ. Ravni α i γ imaju zajedničku tačku P pa je njihov presek prava. Ako je to prava p dokaz je završen jer je tada $p, r \subset \gamma$. Neka je $\alpha \cap \gamma = p'$ i $p \neq p'$. Sada su p, p', q prave ravni α, prave p i p' se seku u tački P, pa prema Plejferovoj aksiomi ne mogu biti i p i p' disjunktne sa q. Dakle, prave p' i q se seku u nekoj tački označimo je sa X. Tačka X sada pripada svim trima ravnima, α, β, γ tj. $X \in \alpha \cap \beta \cap \gamma = (\alpha \cap \beta) \cap (\beta \cap \gamma) = q \cap r$. To nije moguće jer je $q \cap r = \emptyset$. Dakle, p i r su komplanarne. ❑

Klase ekvivalencije relacije paralelnosti zvaćemo *pravcima*. Tako je pravac prave p kolekcija svih pravih paralelnih pravoj p.

Uvedimo još dva nova pojma:

Definicija. Prava p je *paralelna* sa ravni α u oznaci $p\|\alpha$ ako je $p\subset\alpha$ ili $p\cap\alpha=\emptyset$.



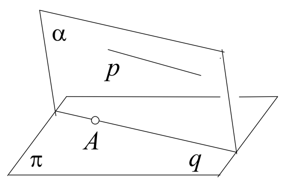
Ako je $p\|\alpha$ rećićemo i da su prava p i ravan α *paralelne* ili da je ravan α *paralelna pravoj* p, a označavati i sa $\alpha\|p$.

Definicija. Ravni α i β su *paralelne* u oznaci $\alpha\|\beta$ ako je $\alpha=\beta$ ili $\alpha\cap\beta=\emptyset$.

Teorema V_3**.** Prava p je paralelna sa ravni π akko u toj ravni postoji prava paralelna sa pravom p; tj:

$$p\|\pi\Leftrightarrow(\exists q)(q\subset\pi \text{ i } q\|p)$$

Dokaz: Ako prava p pripada ravni π tada su obe strane ekvivalencije tačne. Razmotrimo sada slučaj $p\not\subset\pi$. Dokazivaćemo ekvivalenciju u dva smera.

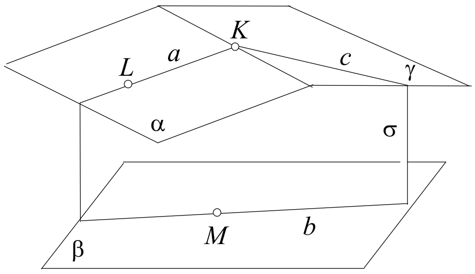


$\Rightarrow$. Neka je $p\|\pi$. Dokažimo da u ravni π postoji prava paralelna sa pravom p. Neka je A proizvoljna tačka u ravni π a koja ne pripada pravoj p. Tada tačka A i prava p određuju neku ravan, označimo je sa α. Ravni α i π imaju zajedničku tačku A pa je njihov presek neka prava q. Naravno, ne može biti $\alpha=\pi$ jer je $p\subset\alpha$ a $p\not\subset\pi$. Sada su prave p i q komplanarne i ne mogu se seći, jer bi njihova presečna tačka pripadala i ravni π. Ovo poslednje nije moguće budući da je $p\|\pi$ i $p\not\subset\pi$ pa prava p i ravan π ne mogu imati zajedničkih tačaka. Dakle, mora biti $q\|p$.

$\Leftarrow$. Pretpostavimo sada da u ravni π postoji prava q koja je paralelna sa pravom p. Ne može biti $p=q$ jer je $p\not\subset\pi$ a $q\subset\pi$. Dakle, prave p i q ne mogu imati zajedničkih tačaka i one određuju neku ravan α. Odatle sledi da su i prava p i ravan π disjunktne. Ako bi se naime p i π sekle njihova presečna tačka pripadala bi i ravni α odnosno preseku α i π tj pravoj q. To nije moguće jer se p i q ne seku. Dakle, p i π su paralelne. ❑

Teorema V_4**.** Relacija paralelnosti ravni je relacija ekvivalencije.

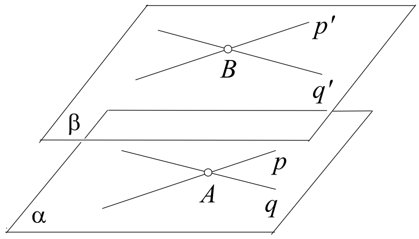
Dokaz: Relacija je refleksivna i simetrična direktno na osnovu definicije. Ostaje da dokažemo da je tranzitivna. Neka su α, β, γ tri ravni takve da je $\alpha\|\beta$ i $\beta\|\gamma$, dokažimo da je $\alpha\|\gamma$. Slučaj kada je $\alpha=\beta$ ili $\beta=\gamma$ je trivijalan.



Razmotrimo zato slučaj: $\alpha\neq\beta$ i $\beta\neq\gamma$. Tada je naravno $\alpha\cap\beta=\emptyset$ i $\beta\cap\gamma=\emptyset$. Pretpostavimo suprotno da nije $\alpha\|\gamma$ tj. neka se α i γ seku po nekoj pravoj p. Sa K označimo proizvoljnu tačku prave p, sa L tačku ravni α koja nije na pravoj p i sa M proizvoljnu tačku ravni β. Na osnovu aksioma incidencije postoji neka ravan σ koja sadrži te tri tačke. Sa svakom od ravni α, β, γ ravan σ ima zajedničkih tačaka a kako se sa svakom od njih razlikuje sećiće ih po trima pravama označimo ih redom sa a, b, c. Ne može biti $a=c$ jer u suprotnom tačka L pripadala bi i ravni γ a prava p i tačka L određuju tačno jednu ravan α. Dakle, prave a i c seku se u tački K. Takođe, one su disjunktne sa pravom b, jer bi u suprotnom jedna od ravni α i γ sekla ravan β. Ali na osnovu Plejferove aksiome u ravni σ ne mogu postojati dve prave koje se seku i disjunktne su sa trećom. Prema tome, mora biti $\alpha\|\gamma$. ❑

Teorema V_5**.** Za svaku ravan α i svaku tačku tačku B postoji tačno jedna ravan koja sadrži tu tačku i paralelna je sa tom ravni; tj:

$$(\forall\alpha)(\forall B)(\exists_1\beta)(B\in\beta\wedge\beta\|\alpha).$$



Dokaz: Ako tačka B pripada ravni α, onda je α tražena ravan. Razmotrimo sada slučaj kada je $B\notin\alpha$. Neka je A proizvoljna tačka ravni α i p i q proizvoljne prave te ravni koje se seku u toj tački. Na osnovu teoreme V_1, postoje jedinstvene prave p' i q' koje sadrže tačku B i paralelne su redom sa pravama p i q. Ako bi bilo $p'=q'$ tada bi na osnovu tranzitivnosti paralelnosti bilo i $p||q$ što na osnovu izbora tih pravih nije moguće. Dakle, prave p' i q' seku se u tački B pa određuju neku ravan, označimo je sa β. Dokažimo da je β tražena ravan. Najpre trivijalno $B\in\beta$. Pretpostavimo da nije $\beta||\alpha$. U tom slučaju ravni α i β seku se po nekoj pravoj r. Na osnovu Plejferove aksiome u ravni β jedna od pravih p' i q' mora seći pravu r. Ne umanjujući opštost neka je npr. $p'\cap r=X$. Prave p i p' su dve razne paralelne prave pa određuju neku ravan ν. Tačka X je u ravnima α i ν dakle i na njihovom preseku tj. pravoj p. Tada bi se prave p i p' sekle u tački X što nije moguće pa je zaista $\beta||\alpha$.

Ostaje nam da dokažemo jedinstvenost takve ravni. Neka je β_1 ravan koja sadrži tačku B i paralelna je sa ravni α. Na osnovu prethodne teoreme, zbog tranzitivnosti relacije paralelnosti ravni, kako je $\beta||\alpha$ i $\beta_1||\alpha$ mora biti i $\beta||\beta_1$. Ravni β i β_1 imaju zajedničku tačku B pa je zbog toga $\beta=\beta_1$. ❑

Zadaci

1. Neka prava p seče ravan α. Ako je q prava koja pripada ravni α i komlanarna je sa pravom p, dokazati da se prave p i q seku.
2. Neka je A tačka van pravih p i q. Ako postoje dve razne prave koje sadrže tačku A i seku prave p i q , tada su p i q komplanarne prave. Dokazati.
3. Dokazati da za svaku pravu p postoji prava koja je sa njom mimoilazna.
4. Dokazati da postoje bar četiri razne ravni i bar šest raznih pravih.

5. Dokazati da se svake dve razne prave neke ravni ili seku ili nemaju zajedničkih tačaka.
6. Dokazati da za svaku ravan postoji prava koja joj ne pripada.
7. Ako se svake dve prave nekog skupa pravih seku, dokazati da su one komplanarne ili se sve seku u jednoj tački.
8. Neka su A, B, C, D, E, F, G različite tačke takve da su A, B, C, D nekomplanarne i $E \in AB$, $F \in AC$, $G \in CD$. Dokazati da su E, F, G nekolinearne tačke.
9. Ako su P i Q tačke ivica BC i AC trougla ABC, različite od njegovih temena, dokazati da se duži AP i BQ seku u jednoj tački.
10. Ako su P, Q, R tačke ivica BC, AC, AB trougla ABC, različite od njegovih temena, dokazati da se duži AP i QR seku u jednoj tački.
11. Dokazati da je presek dva konveksna skupa konveksan skup.
12. Dokazati da je trougaona površ konveksan skup.
13. Ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i $\mathcal{B}(D,A,C)$, dokazati da je tada i $\mathcal{B}(B,A,D)$
14. Neka su A, B, C, D kolinearne tačke i neka $\neg\mathcal{B}(B,A,C)$, $\neg\mathcal{B}(B,A,D)$. Dokazati da $\neg\mathcal{B}(C,A,D)$.
15. Svake dve prave neke ravni se ili seku ili su paralelne. Dokazati.
16. Ako neka prava seče jednu od dve paralelne ravni, dokazati da ona tada seče i drugu ravan.
17. Ako neka ravan seče jednu od dve paralelne prave, dokazati da ona tada seče i drugu pravu.
18. Ako neka ravan seče jednu od dve paralelne ravni, dokazati da ona tada seče i drugu ravan.
19. Ako ravan σ seče dve paralelne ravni α i β po pravama p i q dokazati da je tada $p \| q$.
20. Ako su α i β ravni i p prava pri čemu je $p \| \alpha$ i $\alpha \| \beta$ dokazati da je $p \| \beta$.
21. Ako su p i q dve mimoilazne prave dokazati da postoji jedinstvena ravan koja sadrži pravu p i paralelna je sa pravom q.

22. Neka su p i q dve mimoilazne prave i S tačka van njih. Dokazati da postoji jedinstvena ravan koja sadrži tačku S i paralelna je sa pravama p i q.

23. Neka se ravni α i β seku po pravoj t. Ako je p proizvoljna prava, dokazati ekvivalenciju:
$$p \| t \Leftrightarrow p \| \alpha \text{ i } p \| \beta$$

24. Dokazati da u prostoru postoje bar dve razne paralelne ravni.

25. Ako su sve tačke neke prave p sa iste strane ravni α, dokazati da je $p \| \alpha$.

26. Neka su p i q dve mimoilazne prave i A tačka van njih. Dokazati da postoji prava koja sadrži tačku A, seče jednu od pravih p i q a drugu seče ili je sa njom paralelna.

27. Ako su svake dve od pravih a, b, c komplanarne i nisu sve tri u istoj ravni, tada se one seku u istoj tački, ili su paralelne.

28. Neka su A, B, C, D, S tačke od kojih nikoje četiri nisu komplanarne. Ako prava AB seče ravan CSD u tački M; prava BC seče ravan ASD u tački N; prava CD seče ravan BSA u tački K; prava DA seče ravan BSC u tački L, dokazati da su tačke M, N, K, L komplanarne.

29. Ako su Φ_1, Φ_2, ... , Φ_n ($n \geq 4$) konveksne figure neke ravni od kojih svake tri imaju bar jednu zajedničku tačku, dokazati da tada svih n figura imaju bar jednu zajedničku tačku. (*Helijeva teorema*[8])

30. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ($n>3$) poluravni koje prekrivaju neku ravan α. Dokazati da postoje tri od tih poluravni, koje prekrivaju ravan α.

[8] *E. Heli* (1884-1943), austrijski matematičar, dokazao je ovo tvrđenje 1913. godine.

Glava III

Podudarnost

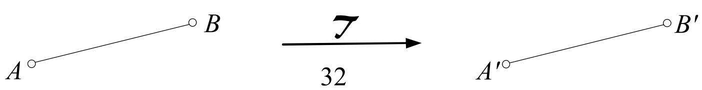
U ovoj glavi razmatraćemo daljnje posledice aksioma podudarnosti. Ove aksiome omogućuju nam da definišemo relaciju podudarnosti me|u figurama. Ali pre toga, uvešćemo posebnu vrstu preslikavanja prostora, koja imaju veliku primenu u geometriji. Za većinu stavova u ovoj glavi neće se u dokazu koristiti Plejferova aksioma, pa će stoga oni važiti kako u euklidskoj, tako i u geometriji Lobačevskog.

3.1 Izometrijske transformacije

Čitalac je već od ranije upoznat sa pojmovima *funkcije*, *domena*, *kodomen*a i oznakom $f:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ (gde su $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ skupovi, koje zovemo domen i kodomen). Funkciju smo tako|e zvali i preslikavanje. U slučaju kad je $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ funkcija se naziva *transformacija*.

Intuitivno dve figure su podudarne ako ih nekim "kretanjem" možemo dovesti do poklapanja. Naravno, ova definicija ne može biti zadovoljavajuća, pa ćemo zato pokušati da formalizujemo pojam "kretanje". Njega ćemo uvesti kao neko preslikavanje celog prostora ili ravni. Dakle, ideja se sastoji u tome da vršimo "kretanje" cele ravni ili prostora a ne samo figure. Prirodno, zahtevaćemo da takvo preslikavanje čuva relaciju podudarnosti parova tačaka tj:

Definicija. Preslikavanje $\mathcal{T}: E^n \to E^n$; $n\in\{1,2,3\}$, koje je bijekcija i koje svake dve tačke A i B prostora E^n preslikava u tačke A' i B' takve da je $(A,B)\cong(A',B')$ naziva se *izometrijska transformacija* ili *izometrija* prostora



E^n.

Na osnovu definicije, domen i kodomen izometrijskih transformacija mogu biti euklidska prava, ravan i prostor. To znači da možemo govoriti o izometrijskim transformacijama euklidske prave, ravni i prostora. Na primer u slučaju izometrije ravni cela se ravan preslikava u istu tu ravan. Zahtev da je takva transformacija bijektivna garantuje da se cela ravan slika u celu ravan, a ne neki njen deo.

Odmah ćemo se setiti nekih primera izometrijskih transformacija ravni kao što su: *osna simetrija*, *rotacija* i *translacija*. Ali njih ćemo definisati i izučavati detaljnije, kada budemo izvršili klasifikaciju izometrija, u jednoj od narednih glava. Da bismo ih sada uveli, bio bi nam potreban pojam podudarnosti duži, uglova i figura uopšte. Međutim, te pojmove ćemo tek kasnije definisati, koristeći se opštim pojmom izometrije. Među izometrijama najjednostavniji je primer transformacije koja svaku tačku ostavlja na svom mestu:

Definicija. Preslikavanje $\mathcal{E}: E^n \to E^n$ koje svaku tačku A preslikava u samu sebe tj. $(\forall A \in E^n)\mathcal{E}(A)=A$ naziva se *koincidencija*.

Koincidencija je dakle transformacija kod koje svaka tačka "miruje". Iako je intuitivno jasno, potrebno je dokazati da je takvo preslikavanje zaista izometrija. Uz to, navešćemo i dva važna svojstva izometrijskih transformacija:

Teorema 1.* (*i*) Koincidencija prostora E^n je izometrijska transformacija tog prostora.

(*ii*) Kompozicija dve izometrije prostora E^n je takođe izometrija tog prostora.

(*iii*) Ako je $\mathcal{I}$ izometrija prostora E^n tada je njena inverzna transformacija $\mathcal{I}^{-1}$ takođe izometrija tog prostora.

Na osnovu prethodne teoreme možemo zaključiti da sve izometrije prostora E^n čine tzv. *strukturu grupe*[9] u odnosu na operaciju slaganja preslikavanja. Naime, osim tri svojstva iz te teoreme (kompozicija dve izometrije je izometrija, postojanje neutralnog i inverznog elementa), za

[9] *Teoriju grupa* otkrio je genijalni mladi francuski matematičar *E. Galoa* (1811-1832).

strukturu grupe potrebno je da data operacija bude asocijativna, što je za slaganje preslikavanja inače ispunjeno.

Iako za sada još ne uvodimo konkretne primere izometrija (rotaciju, translaciju, osnu simetriju), sa kojima je čitalac upoznat od ranije, nije loše da kroz te primere ponekad utvrdimo neki uvedeni pojam ili svojstvo. Tako ćemo, na primer, lako zaključiti da inverzna transformacija rotacije predstavlja takođe rotaciju sa istim centrom ali suprotnim uglom. Takođe, kompozicija dve translacije sa vektorima $\vec{u}, \vec{v}$ je translacija za vektor $\vec{u} + \vec{v}$. Naravno, ovi primeri nam za sada samo pomažu u razumevanju, ali ih nigde ne pominjemo u formalnom izlaganju.

Sada ćemo dokazati očekivano svojstvo, da se kolinearne tačke izometrijom preslikavaju u kolinearne tačke, tj. da izometrijske transformacije "čuvaju" kolinearnost. Dokazaćemo i opštije tvrđenje: da izometrije čuvaju relaciju rasporeda tačaka.

Teorema 2. Ako izometrija prostora E^n preslikava neke tri tačke A, B, C u tačke A', B', C' i ako je $\mathcal{B}(A,B,C)$, tada je i $\mathcal{B}(A',B',C')$.

Dokaz: Neka se tri tačke A, B, C izometrijom $\mathcal{T}$ preslikavaju u tačke A', B', C' i neka je $\mathcal{B}(A,B,C)$. Na osnovu definicije izometrije je tada: $(A,C)\cong(A',C')$, $(A,B)\cong(A',B')$, $(B,C)\cong(B',C')$. Ali sada na osnovu teoreme III_3, kako je $(A,C)\cong(A',C')$, postoji jedinstvena tačka B'' takva da je $(A,B)\cong(A',B'')$ i $(B,C)\cong(B'',C')$, pri čemu je $\mathcal{B}(A',B'',C')$. Na osnovu prethodnog, mora biti $B'=B''$, pa je zaista $\mathcal{B}(A',B',C')$. ❑

Kao direktnu posledicu prethodnog, imamo sledeće tvrđenje:

Posledica. (*i*) Izometrija preslikava kolinearne tačke u kolinearne tačke.
(*ii*) Izometrijska transformacija preslikava: pravu u pravu; duž u duž; polupravu u polupravu; poluravan u poluravan; ugao u ugao; n-tougao u n-tougao.

Navešćemo neka svojstva izometrijskih transformacija pravih, tj. izometrija $\mathcal{T}: E^1 \to E^1$.

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza:

Teorema 3. Neka su A, B, A', B' tačke euklidske prave E^1 takve da je $(A,B)\cong(A',B')$. Tada postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}: E^1 \to E^1$ koja tačke A i B preslikava redom u tačke A' i B'.

Napomena: Dokaz ove teoreme zasniva se opet na teoremi III_3.

Od naročitog značaja su tačke koje se pri nekoj izometriji preslikavaju u sebe. Razmatraćemo broj takvih tačaka koji će biti karakteristika određenih izometrija.

Definicija. Tačka A je *fiksna* ili *invarijantna* tačka neke izometrije $\mathcal{I}: E^n \to E^n$; $n \in \{1,2,3\}$, ako je $\mathcal{I}(A)=A$.

Značajna je sledeća posledica teoreme 3:

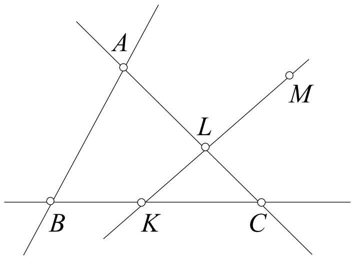
Posledica.* Izometrija prave $\mathcal{I}: E^1 \to E^1$ sa bar dve razne fiksne tačke je koincidencija.

U iskazu ove posledice tvrdi se da izometrija prave koja nije koincidencija ne može imati više od jedne fiksne tačke. Intuitivno je sada jasno da na pravoj, osim koincidencije, postoje samo dve vrste izometrija. One koje imaju tačno jednu fiksnu tačku predstavljale bi centralne simetrije na pravoj, gde bi centar simetrije bio ta fiksna tačka. One koje nemaju fiksnu tačku bile bi translacije na pravoj.

Što se tiče izometrija ravni, tj. izometrija $\mathcal{I}: E^2 \to E^2$, stvar je znatno složenija. Translacija ravni, na primer, nema fiksnih tačaka; rotacija ima samo jednu. Postavlja se pitanje koliko najviše fiksnih tačaka može imati izometrija, koja nije koincidencija. Osna simetrija ih ima beskonačno mnogo, ali su sve kolinearne. Zamislimo sada da neka izometrija ima tačno jednu fiksnu tačku. Intuitivno, jedino "kretanje" ravni koje tada možemo izvršiti je rotacija oko te tačke. Ako izometrija, koja nije koincidencija, ima bar dve fiksne tačke, slutimo, opet intuitivno, da je jedino moguće "kretanje" te ravni, "prevrtanje" oko prave određene fiksnim tačkama - a to je osna simetrija. U slučaju da izometrija ima tri fiksne nekolinearne tačke, ravan bi njima bila cela fiksirana i ne bi bilo moguće nikakvo "kretanje". Slutimo, dakle, da bi takva izometrija morala biti koincidencija. Postavlja se međutim pitanje, postoje li osim translacija još neke izometrije bez fiksnih tačaka, i uopšte, ima li još izometrija osim ovih pomenutih. Odgovor na oba ova pitanja je potvrdan, ali ćemo se time baviti tek u jednoj od narednih glava, kada ćemo izvršiti potpunu klasifikaciju izometrija. Napomenimo samo da je pojam fiksnih tačaka veoma značajan i da će on u toj klasifikaciji odigrati glavnu ulogu. Taj posao započinjemo, ustvari, već narednom teoremom:

> ***Teorema 4.*** Izometrijska transformacija ravni $\mathcal{I}: E^2 \to E^2$ koja ima bar tri fiksne nekolinearne tačke je koincidencija.

Dokaz: Neka su A, B, $C \in E^2$ tri nekolinearne fiksne tačke izometrije $\mathcal{I}$ tj. neka je $\mathcal{I}(A)=A$, $\mathcal{I}(B)=B$, $\mathcal{I}(C)=C$. Označimo sa $\mathcal{I}_1$ izometriju prave AB (dakle $\mathcal{I}_1: E^1 \to E^1$) takvu da je $\mathcal{I}_1(X)=\mathcal{I}(X)$, za svaku tačku X prave AB. Tada je i $\mathcal{I}_1(A)=A$, $\mathcal{I}_1(B)=B$, pa je na osnovu prve posledice teoreme 5, izometrija $\mathcal{I}_1$ koincidencija na pravoj AB. Tada je za svaku tačku X prave AB: $\mathcal{I}(X)=\mathcal{I}_1(X)=X$. Dakle, svaka tačka prave AB je fiksna u izometriji $\mathcal{I}$. Analogno su i sve tačke pravih BC i AC fiksne u izometriji $\mathcal{I}$. Neka je M proizvoljna tačka ravni E^2 koja nije na pravama AB, BC, AC. Sa K označimo proizvoljnu tačku otvorene duži BC. Na osnovu Pašove aksiome prava KM ili sadrži tačku A ili seče jednu od ivica AB i AC u nekoj tački L. Tako na pravoj KM postoje bar dve razne fiksne tačke izometrije $\mathcal{I}$ (K i L ili K i A). Sada na isti način kao za pravu AB dokazujemo da su na pravoj KM sve tačke fiksne pa tako i tačka M. ❑



Navešćemo još jednu važnu teoremu bez dokaza:

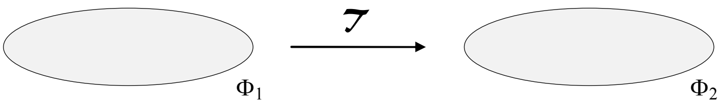
> ***Teorema 5.*** Neka su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka ravni E^2 takve da je $(A,B,C) \cong (A',B'C')$. Tada postoji jedinstvena izometrija ravni $\mathcal{I}: E^2 \to E^2$ koja tačke A, B, C preslikava redom u tačke A', B', C'.

Na osnovu ove teoreme je dakle, svaka izometrija ravni $\mathcal{I}$ određena sa tri odgovarajuća para $A'=\mathcal{I}(A)$, $B'=\mathcal{I}(B)$, $C'=\mathcal{I}(C)$ pri čemu su A, B, C nekolinearne tačke.

3.2 Relacija podudarnosti figura

Kao što smo već nagovestili, sada ćemo uvesti nov pojam: relaciju podudarnosti figura.

Definicija. Dve figure Φ_1 i Φ_2 su *podudarne* u, oznaci $\Phi_1 \cong \Phi_2$, ako postoji izometrija $\mathcal{T}$ koja preslikava Φ_1 u Φ_2 tj. $\mathcal{T}(\Phi_1)=\Phi_2$.



Napominjemo da uopšte, za neko preslikavanje f, $f(\Phi)$ predstavlja skup slika svih tačaka figure Φ u preslikavanju f. Dakle:

$f(\Phi)=\{f(X)|X\in\Phi\}$

Lako se dokazuje očekivano svojstvo ove relacije:

Teorema 1.* Relacija podudarnosti figura je relacija ekvivalencije.

Zadaci

1. Ako neka izometrija $\mathcal{T}$ preslikava figure Φ_1 i Φ_2 u figure Φ'_1 i Φ'_2, dokazati da se tada presek $\Phi_1 \cap \Phi_2$ tom izometrijom preslikava u presek $\Phi'_1 \cap \Phi'_2$.

2. Dokazati da su svake dve poluprave neke ravni među sobom podudarne.

3. Dokazati da su svake dve prave neke ravni među sobom podudarne.

4. Dokazati da su svake dve tačke prostora među sobom podudarne.

5. Neka su k i k' dva kruga neke ravni sa centrima O i O' i poluprečnicima AB i $A'B'$ redom. Dokazati ekvivalenciju: $k \cong k' \Leftrightarrow (A,B)\cong(A',B')$.

6. Neka je $\mathcal{T}$ neidentična izometrija ravni sa dve fiksne tačke A i B. Ako je p prava te ravni koja je paralelna sa pravom AB i od nje različita, dokazati da na njoj nema fiksnih tačaka izometrije $\mathcal{T}$.

3.3 Podudarnost duži

Nema potrebe da posebno definišemo podudarnost duži, jer su duži figure, pa se to uklapa u prethodnu definiciju. Kako se lako dokazuje da su svake dve prave podudarne, ubuduće ćemo pod oznakom $AB \cong CD$ podrazumevati da su duži AB i CD podudarne.

Kada smo u poglavlju aksiomatike razmatrali pojam podudarnosti parova tačaka, imali smo intuitivnu predstavu da se radi o podudarnosti duži. Kako smo ovaj poslednji pojam tek sada uveli, iskazaćemo sledeću teoremu:

Teorema 1. $(A,B) \cong (A',B') \Leftrightarrow AB \cong A'B'$.

Nećemo navoditi strogi dokaz ove teoreme. Napomenimo, da se u dokazu koristi teorema 7, o postojanju izometrije, kao i teorema 4, na osnovu koje izometrije čuvaju raspored (obe teoreme su iz odeljka 3.1).

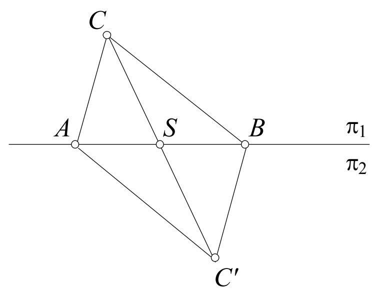
Na osnovu prethodne teoreme, sada smo u mogućnosti da umesto podudarnosti parova tačaka govorimo o podudarnosti duži.

Definicija. Tačka S je *središte duži AB* ako pripada toj duži i važi $AS \cong SB$.

Dokažimo sledeću značajnu teoremu:

Teorema 2. Za svaku duž postoji jedinstveno središte.

Dokaz: Neka je AB proizvoljna duž. Dokažimo da ona ima jedinstveno središte. Neka je C proizvoljna tačka van prave AB. Tada tačke A, B, C određuju jednu ravan α i dve poluravni sa početnom pravom AB. Sa π_1 označimo onu koja sadrži tačku C, a sa π_2 onu drugu. Na osnovu aksiome III_6 u poluravni π_2 postoji jedinstvena tačka C' takva da je $AC \cong BC'$ i $BC \cong AC'$. Kako je i $AB \cong AB$,

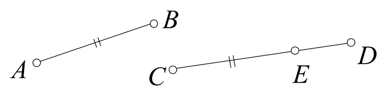


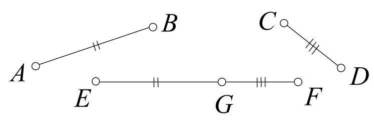
prema teoremi 7, iz odeljka 3.1, postoji jedinstvena izometrija $\mathcal{I}$ koja preslikava tačke A, B, C redom u tačke B, A, C'. Zbog čuvanja podudarnosti ona preslikava i tačku C' u tačku C. Tačke C i C' su sa raznih strana prave AB, pa duž CC' seče pravu AB u nekoj tački S. Izometrija $\mathcal{I}$ preslikava prave AB i CC' u sebe same, pa je S kao njihova presečna tačka fiksna tačka te izometrije. Tada je zbog $\mathcal{I}:A,S\mapsto B,S$ i $AS\cong SB$. Dokažimo da tačka S pripada duži AB. Tačke A i B nisu fiksne tačke izometrije $\mathcal{I}$, pa se S od njih razlikuje. Ako bi bilo npr. $\mathcal{B}(A,B,S)$, tada bi na polupravoj SA postojale dve razne tačke A i B takve da je $SA\cong SB$, što je u kontradikciji sa teoremom III_2. Dakle, tačka S je središte duži AB.

Dokažimo da je to središte jedinstveno. Pretpostavimo da je S_1 takođe središte duži AB. U tom slučaju je $AS_1\cong S_1B$, pa restrikcija izometrije $\mathcal{I}$ na pravoj AB ima dve fiksne tačke S i S_1. Tada bi ona predstavljala koincidenciju na pravoj AB, što nije moguće jer tačke A i B nisu fiksne. Dakle, mora biti $S=S_1$. ❑

Uvešćemo sada još neke pojmove:

Definicija. Duž AB je *manja* od duži CD u oznaci $AB<CD$ ako unutar duži CD postoji tačka E takva da je $AB\cong CE$. Takođe u tom slučaju kažemo i da je duž CD *veća* od duži AB u oznaci $CD>AB$.





Definicija. Duž EF jednaka je *zbiru* duži AB i CD u oznaci $EF=AB+CD$ ako unutar duži EF postoji tačka G takva da je $AB\cong EG$ i $CD\cong GF$.

Čitaocu prepuštamo da uvede pojmove kao što su razlika duži i množenje duži prirodnim brojem (tj. kada je $AB=nCD$; $n\in\mathbb{N}$) kao i racionalnim pozitivnim brojem. Napomenimo da je definicija množenja duži realnim pozitivnim brojem složenija, i ovde je nećemo navoditi. Ona je u vezi sa pojmom mere duži, koji ćemo razmatrati u osmoj glavi.

3.4 Podudarnost uglova, pravi uglovi, relacija normalnosti pravih

U ovom odeljku nećemo dokazivati većinu teorema. Detaljno izlaganje ove teme oduzelo bi nam dosta vremena. Inače, u njihovom dokazivanju značajnu ulogu ima teorema 7, iz odeljka 3.1, kao i njena naredna posledica:

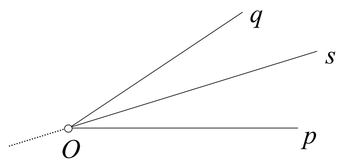
Teorema 1. Dva konveksna (ili konkavna) ugla pOq i $p'O'q'$ su podudarna ako i samo ako na kracima p, q, p', q' redom postoje tačke P, Q, P', Q' takve da je: $(P,O,Q)\cong(P',O',Q')$.

Napomenimo, da sada relaciju $(P,O,Q)\cong(P',O',Q')$ možemo iskazati i u obliku: $PO\cong P'O'$ i $OQ\cong O'Q'$ i $PQ\cong P'Q'$.

Teorema 2. Unakrsni uglovi su međusobno podudarni.

Teorema 3. Za svaki $\angle pq$ i svaku polupravu p' neke ravni, postoji u poluravni određenoj pravom koja sadrži p', jedinstvena poluprava q' takva da je $\angle pq\cong\angle p'q'$.

Sada ćemo uvesti pojam koji je analogan pojmu središta duži:



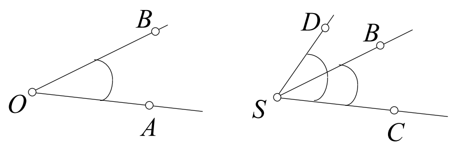
Definicija. Poluprava s, sa početnom tačkom O koja pripada uglu pOq i takva da je $\angle ps\cong\angle sq$ naziva se *bisektrisa* ugla pOq. Prava koja sadrži polupravu s naziva se *simetrala* tog ugla.

Iskažimo teoremu koja se odnosi na pojam bisektrise. Ona je, opet, analogna teoremi o jedinstvenosti središta duži.

Teorema 4. Svaki ugao ima jedinstvenu bisektrisu.

Slično kao kod duži, sada možemo uvesti relacije poređenja među uglovima kao i pojam zbira dva ugla:

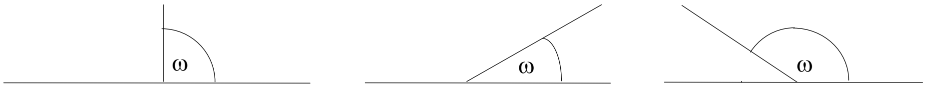
Definicija. Ugao AOB je *manji* od ugla CSD u oznaci $\angle AOB<\angle CSD$ ako unutar ugla CSD postoji poluprava SE takva da je $\angle AOB\cong\angle CSE$. U tom slučaju kažemo i da je ugao CSD *veći* od ugla AOB u oznaci $\angle CSD>\angle AOB$.



Definicija. Ugao pOq je *zbir uglova* aSb i $a'S'b'$ u oznaci: $\angle pOq=\angle aSb+\angle a'S'b'$, ako unutar ugla pOq postoji poluprava r sa početnom tačkom O tako da je $\angle pOr\cong\angle aSb$ i $\angle rOq\cong\angle a'S'b'$.

Čitaocu prepuštamo da uvede pojmove razlike dva ugla i množenja ugla prirodnim i racionalnim pozitivnim brojem. Uvedene relacije poređenja među uglovima nam omogućuju da definišemo sledeće važne pojmove:

Definicija. Za konveksni ugao kaže se da je *prav*, *oštar* ili *tup* u zavisnosti od toga da li je on podudaran, manji od ili veći od svog



naporednog ugla.

Definicija. Uglovi α i β su *suplementni* ako im je zbir opruženi ugao.

Definicija. Uglovi α i β su *komplementni* ako im je zbir prav ugao.

Iako izgledaju očigledna sledeća dva svojstva pravih uglova moraju se iskazati kao teoreme. Ovde ih međutim nećemo dokazivati.

Teorema 5. Ugao podudaran nekom pravom uglu takođe je prav.

Teorema 6. Pravi uglovi su među sobom podudarni.

Kako su svi pravi uglovi među sobom podudarni, moguće je uvesti pojam *mere ugla* (koji ovde uvodimo neformalno). Mi ćemo koristiti meru u stepenima, u kojoj pravom uglu odgovara mera od 90 stepeni u oznaci 90°. Naravno, u tom slučaju mera opruženog ugla bila bi 180°. Napomenimo da inače problem uvođenja mere ugla, kao uostalom i mere duži, nije nimalo jednostavan.

Sada, pomoću pojma pravog ugla, možemo uvesti značajnu relaciju među pravama. Radi se o relaciji normalnosti pravih.

Definicija. Ako prave p i q sadrže redom krake OP i OQ nekog pravog ugla POQ, tada kažemo da je prava p *normalna* (*upravna*, *ortogonalna*) na pravoj q u oznaci $p \perp q$.

Iz same definicije je jasno da je relacija normalnosti pravih simetrična. Tako, ako je $p\perp q$, možemo reći i da su prave p i q međusobno normalne.

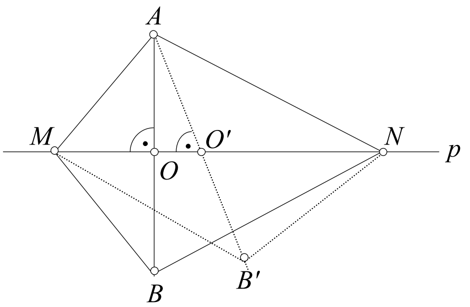
Dokažimo sada jednu značajnu teoremu:

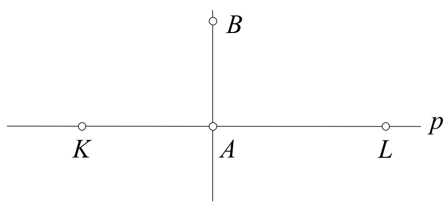
> ***Teorema 7.*** Za svaku pravu p i svaku tačku A neke ravni postoji jedinstvena prava n u toj ravni koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj p.

Dokaz: Razmotrimo dva slučaja:

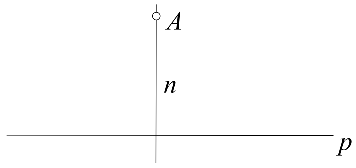
1) $A\notin p$. Neka su M i N dve razne tačke prave p. Tada na osnovu aksiome III_6 u poluravni određenoj pravom p, u kojoj nije tačka A, postoji jedinstvena tačka B, takva da je $(M,A,N)\cong(M,B,N)$. Tačke A i B su sa raznih strana prave p pa prava AB seče pravu p u nekoj tački O. Bar jedna od tačaka M i N je različita od tačke O, neka je to tačka M. Tada je $(M,O)\cong(M,O)$, pa je na osnovu aksiome III_7 i $(O,A)\cong(O,B)$. Prema tome (M,O,A) i (M,O,B) su dve trojke podudarnih tačaka, pa su na osnovu teoreme 1, naporedni uglovi MOA i MOB podudarni i kao takvi pravi. Stoga je $AB\perp p$.

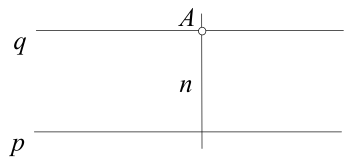
Dokažimo jedinstvenost ovakve prave. Pretpostavimo suprotno, da osim nje postoji još neka prava koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj p. Ako je O' presečna tačka te prave sa pravom p i B' tačka te prave, takva da je $AO'\cong O'B'$ i $\mathcal{B}(A,O',B')$, tada postoji izometrija koja preslikava ugao $AO'M$ u ugao $B'O'M$. Ta izometrija tačke A, O', M preslikava u tačke B', O', M, pa je $AM\cong B'M$. Analogno se dokazuje da je i $AN\cong B'N$. U tom slučaju sa iste strane prave p postoje dve tačke B i B', takve da je $(M,A,N)\cong(M,B,N)$ i $(M,A,N)\cong(M,B',N)$, što protivreči aksiomi III_6.





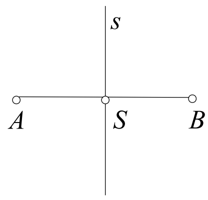
2) $A\in p$. Ako su K i L dve tačke prave p takve da je $\mathcal{B}(K,A,L)$, tada na osnovu teoreme 4, postoji jedinstvena bisektrisa BA opruženog ugla KAL, koja taj ugao razlaže na dva podudarna naporedna ugla. Stoga je prava AB upravna na pravoj p. Jedinstvenost ove normale dokazujemo na sličan način kao u prethodnom slučaju. ❑





Važno je pomenuti da ni u jednom od dokaza ovih teorema nije potrebno koristiti Plejferovu aksiomu. Sada je jasno zašto je kod Plejferove aksiome dovoljno istaći jedinstvenost disjunktne prave. Naime, samo na osnovu prve četiri grupe aksioma, moguće je dokazati da za pravu p i tačku A van nje, u ravni njima određenoj, postoji prava koja sadrži tu tačku i disjunktna je sa tom pravom. Zaista, koristeći prethodnu teoremu, zaključujemo da postoji prava n koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj p. Takođe, postoji prava q koja sadrži tačku A i normalna je na pravoj n. Prave p i q moraju biti disjunktne, jer ako bi se sekle, npr. u tački B, postojale bi dve normale iz te tačke na pravoj n, a to je u suprotnosti sa prethodnom teoremom. Naravno, bez Plejferove aksiome nismo u mogućnosti da dokažemo da je ovakva disjunktna prava jedinstvena.

Na kraju uvedimo još jedan važan pojam:



Definicija. Neka je tačka S središte duži AB. Prava koja je u tački S normalna na pravoj AB naziva se *medijatrisa* ili *simetrala* duži AB.

Na osnovu prethodne teoreme i teoreme o jedinstvenosti središta duži, zaključujemo da svaka duž ima jedinstvenu medijatrisu. Kasnije, u jednom od zadataka, čitalac će dokazati da medijatrisa duži AB predstavlja skup svih tačaka X ravni takvih da je $AX \cong XB$.

3.5 Podudarnost trouglova

Na osnovu opšte definicije o podudarnosti figura možemo zaključiti da su dva trougla podudarna akko postoji izometrija koja jedan trougao preslikava u drugi. Često, međutim, nije lako direktno, na ovaj način, dokazivati tu podudarnost. Zato ćemo sada uvesti još neke potrebne i dovoljne uslove za podudarnost dva trougla. Oni su poznati kao četiri stava o podudarnosti trouglova.

Kako izometrije čuvaju raspored, jasno je da ako su dva trougla podudarna tada su podudarne i odgovarajuće ivice i odgovarajući uglovi ta dva trougla. Sada ćemo razmotriti obrnut problem: koji su od uslova podudarnosti odgovarajućih ivica i uglova dovoljni da dva trougla budu podudarna. Te uslove daju već pomenuti stavovi o podudarnosti trouglova[10]. U svim tim stavovima pretpostavljamo da trouglovi pripadaju istoj ravni. Naravno, oni važe i u slučaju kad trouglovi nisu komplanarni, ali bismo tada u dokazu koristili svojstva izometrija prostora. Zbog lakšeg dokazivanja, stavove navodimo drugim redosledom.

***Stav 3.* (*SSS*)** Dva trougla su podudarna ako su im odgovarajuće ivice podudarne, tj.:

$$AB\cong A'B',\ BC\cong B'C',\ AC\cong A'C' \Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$$

Dokaz: Neka su ABC, $A'B'C'$ dva trougla takva da je $AB\cong A'B'$, $BC\cong B'C'$, $AC\cong A'C'$. Na osnovu teoreme 2, iz odeljka 3.3, tada su i odgovarajući

parovi tačaka podudarni, pa je i $(A,B,C)\cong(A',B',C')$. Tada, prema poznatoj teoremi postoji izometrija $\mathcal{I}$ te ravni, koja tačke A, B, C preslikava redom u tačke A', B', C'. Ali izometrije čuvaju raspored, pa se odgovarajuće ivice jednog trougla preslikavaju u odgovarajuće ivice drugog trougla. Na osnovu toga izometrija $\mathcal{I}$ preslikava trougao ABC u trougao $A'B'C'$, pa je onda $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$. ❑

[10] Prvi, treći i četvrti stav o podudarnosti trouglova pripisuju se starogrčkom filozofu i matematičaru *Pitagori sa ostrva Samosa*, (*VI* v. pre n. e.), dok se za drugi stav pretpostavlja da je bio poznat još *Talesu iz Mileta* (*VII-VI* v. pre n. e.).

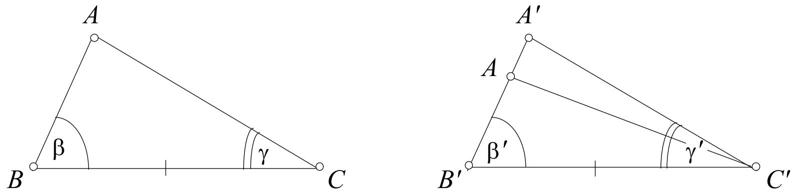
Stav 1. **(*SUS*)** Dva trougla su podudarna ako su dve ivice i njima zahvaćeni ugao jednog trougla podudarni sa odgovarajućim ivicama i uglovima drugog trougla, tj:

$$AB \cong A'B',\ AC \cong A'C',\ \angle BAC \cong \angle B'A'C' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

Dokaz: Neka su ABC, $A'B'C'$ dva trougla takva da je $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. Tada postoji neka izometrija $\mathcal{I}$ koja ugao BAC preslikava u ugao $B'A'C'$. Zbog čuvanja rasporeda teme A prvog ugla preslikava se tom izometrijom u teme A' drugog ugla. Tačke B i C preslikavaju se u tačke B_1, C_1 na kracima $A'B'$ i $A'C'$ takve da je $AB \cong A'B_1$ i $AC \cong A'C_1$. Na osnovu teoreme III_2 (kod aksioma podudarnosti) takve tačke B_1 i C_1 su jedinstvene tj. mora biti $B_1 = B'$ i $C_1 = C'$. Dakle $\mathcal{I}: A,B,C \mapsto A',B',C'$ pa su trouglovi ABC i $A'B'C'$ podudarni. ❑

Stav 2. **(*USU*)** Dva trougla su podudarna ako su jedna ivica i na njoj nalegli uglovi jednog trougla podudarni sa odgovarajućom ivicom i odgovarajućim uglovima drugog trougla, tj:

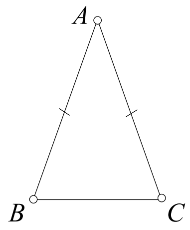
$$BC \cong B'C',\ \angle ABC \cong \angle A'B'C',\ \angle ACB \cong \angle A'C'B' \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$



Dokaz: Neka su ABC, $A'B'C'$ dva trougla takva da je $BC \cong B'C'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$. Dokažimo da mora biti $AB \cong A'B'$. Pretpostavimo suprotno, neka je npr. ne umanjujući opštost, $AB < A'B'$. Tada postoji tačka A'' na ivici $A'B'$ takva da $AB \cong A''B'$. Na osnovu prethodnog stava zaključujemo da su trouglovi ABC i $A''B'C'$ podudarni, pa su onda i uglovi ACB i $A''C'B'$ takođe podudarni. Dakle, uglovi $A''C'B'$ i $A'C'B'$ su oba podudarna sa uglom ACB. Na osnovu jedne od ranijih teorema, postoji jedinstvena takva poluprava $C'A'$, što znači da se poluprave $C'A'$ i $C'A''$ poklapaju. Onda mora biti i $A'=A''$, pa su trouglovi ABC i $A'B'C'$ zaista podudarni. ❑

> ***Lema 1.*** Naspram podudarnih ivica nekog trougla su podudarni uglovi; i obratno, naspram podudarnih uglova trougla su podudarne ivice.

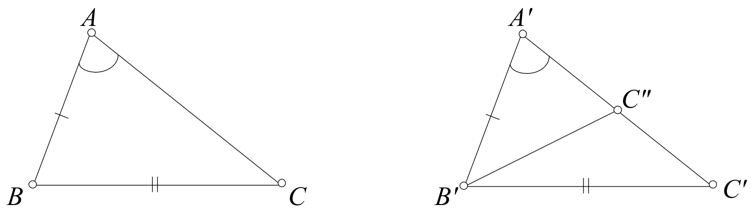
Dokaz: Neka je ABC trougao takav da je $AB \cong AC$. Tada, kako je $AB \cong AC$, $AC \cong AB$, $BC \cong CB$, zaključujemo na osnovu stava *SSS* da je $\Delta ABC \cong \Delta ACB$. Na osnovu toga je $\angle ABC \cong \angle ACB$. Na isti način dokazujemo obratno tvrđenje. Tada bismo koristili stav *USU*. ❑



Trouglovi, kao iz prethodne leme, kod kojih su dve ivice podudarne zovu se *jednakokraki* trouglovi. Podudarne ivice su *kraci*, a treća ivica je *osnovica* tog trougla.

> ***Stav 4.*** **(*SSU*)** Dva trougla su podudarna ako su dve ivice i ugao naspram jedne od njih jednog trougla podudarni sa odgovarajućim ivicama i odgovarajućim uglom drugog trougla, a uglovi naspram drugih dveju pomenutih ivica su oba oštra oba prava ili oba tupa.

Dokaz: Neka su ABC i $A'B'C'$ dva trougla takva da je $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, a $\angle ACB$ i $\angle A'C'B'$ oba oštra, oba prava ili oba tupa.



Dokažimo da je tada $AC \cong A'C'$. Pretpostavimo suprotno. Ne umanjujući opštost neka, je npr. $AC < A'C'$. Tada postoji tačka C'', između tačaka A' i C', takva da je $AC \cong A'C''$. Na osnovu stava *SUS*, trouglovi ABC i $A'B'C''$ su podudarni. Prema tome i uglovi ACB i $A'C''B'$ su takođe podudarni. Ako iskoristimo pretpostavku, zaključujemo da su uglovi $A'C''B'$ i $A'C'B'$ oba oštra oba prava ili oba tupa. Iz podudarnosti trouglova ABC i $A'B'C''$

možemo još zaključiti da je $BC \cong B'C''$. Na osnovu tranzitivnosti su sada i duži $B'C'$ i $B'C''$ takođe podudarne. Trougao $B'C'C''$ je jednakokraki, pa su prema prethodnoj lemi uglovi $B'C'C''$ i $B'C''C'$ podudarni. Sada su i uglovi $A'C''B'$ i $B'C''C'$ oba oštra, oba prava ili oba tupa. Kako su naporedni ostaje jedina mogućnost da su oba prava. Ali tada bi iz tačke B' postojale dve normale na pravoj $A'C'$, što nije moguće. Dakle, pretpostavka da ivice AC i $A'C'$ nisu podudarne vodi u kontradikciju, pa je moramo odbaciti. Kako je sada $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ na osnovu stava *SUS* trouglovi ABC i $A'B'C'$ su podudarni. ❑

Zadaci

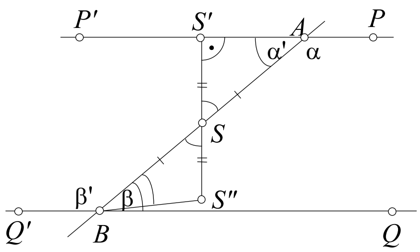
1. Dokazati obratno tvrđenje iz leme 1.
2. Medijatrisa duži AB neke ravni je skup tačaka X te ravni takvih da je $AX \cong BX$. Dokazati.
3. Neka je *ABC pravilan trougao* (kod koga su sve ivice podudarne). Ako su P, Q, R tačke takve da je $\mathcal{B}(B,C,P)$, $\mathcal{B}(C,A,Q)$, $\mathcal{B}(A,B,R)$ i CP, AQ, BR tri podudarne duži, dokazati da je trougao PQR takođe pravilan.

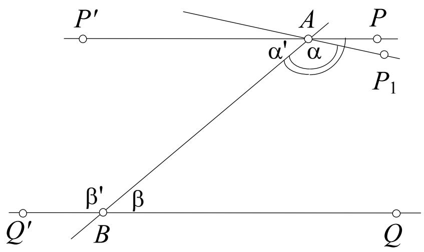
3.6 Uglovi na transverzali. Zbir uglova u trouglu

Sada ćemo razmatrati neke daljnje posledice Plejferove aksiome. Naime, za sve što smo do sada proučavali, u poglavlju podudarnosti, ova aksioma nam nije bila potrebna. To znači da sve do sada navedeno važi, kako u euklidskoj, tako i u geometriji Lobačevskog.

Teorema 1. Neka su A, B, P, Q četiri tačke jedne ravni takve da je $P,Q \doteq AB$ i ω opruženi ugao. Tada važi ekvivalencija:

$$AP \| BQ \Leftrightarrow \angle PAB + \angle QBA = \omega.$$





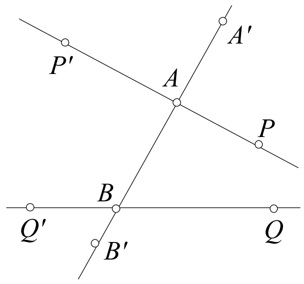
Dokaz: Označimo sa P' i Q' proizvoljne tačke takve da je $\mathcal{B}(P,A,P')$ i $\mathcal{B}(Q,B,Q')$. Uvedimo oznake:

$\alpha=\angle PAB$, $\beta=\angle QBA$, $\alpha'=\angle P'AB$, $\beta'=\angle Q'BA$.

$\underline{\Leftarrow}$. Pretpostavimo da važi $\alpha+\beta=\omega$. Tada iz $\alpha+\alpha'=\omega$ sledi $\beta=\alpha'$. Neka je S središte duži AB, S' podnožje normale iz S na pravoj PA, i S'' tačka takva da je $S''S\cong SS'$ i $\mathcal{B}(S',S,S'')$. Na osnovu stava SUS trouglovi $SS'A$ i $SS''B$ su podudarni, pa je i ugao $BS''S$ prav, a $\angle SBS''=\angle SAS'=\alpha'=\beta=\angle SBQ$. Dakle, tačka S'' pripada pravoj BQ, pa je $S'S''$ zajednička normala pravih PA i QB. Prema tome je $AP\|BQ$, jer ako bi se prave AP i BQ sekle u nekoj tački X, iz te tačke postojale bi dve razne normale na pravoj $S'S''$, što je u suprotnosti sa teoremom 7, iz odeljka 3.4.

$\underline{\Rightarrow}$. Neka je $AP\|BQ$. Dokažimo da je $\alpha+\beta=\omega$. Neka je AP_1 prava takva da je $Q,P_1 \dot{-} AB$ i $\angle P_1AB=\omega-\beta$. Na osnovu dokazanog u prvom delu teoreme ($\underline{\Leftarrow}$), je $AP_1\|BQ$. Prema posledici Plejferove aksiome, prave AP i AP_1 se poklapaju, pa je $\alpha=\angle P_1AB=\omega-\beta$, odnosno $\alpha+\beta=\omega$. ❑

Razmotrimo sada tzv. *uglove na transverzali*. To su uglovi koje obrazuje prava koja seče dve razne prave neke ravni. Tu njihovu zajedničku sečicu nazivamo *transverzala*. Da bismo precizirali o kakvim se uglovima radi, uvedimo sledeće oznake, slične onima iz prethodne teoreme: neka prava t seče dve prave PP' i QQ' u tačkama A i B takvim da je $\mathcal{B}(P,A,P')$, $\mathcal{B}(Q,B,Q')$ i $P,Q \dot{-} AB$. Sa A' i B' označimo tačke prave t takve da je $\mathcal{B}(A',A,B,B')$. Tada:



(i) Za uglove $A'AP$ i ABQ kaže se da su *saglasni*.

(ii) Za uglove PAB i QBA kao i za uglove PAA' i QBB' kaže se da su *suprotni*.

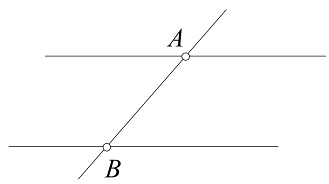
(iii) Za uglove PAB i $Q'BA$ kao i za uglove PAA' i $Q'BB'$ kaže se da su *naizmenični*.

Inače uglovi na transverzali čiji kraci sadrže duž AB zovu se *unutrašnji* a oni drugi *spoljašnji*. Dakle, prethodne pojmove možemo uvesti i na sledeći način:

(i) Jedan spoljašnji i jedan unutrašnji ugao sa iste strane transverzale su saglasni uglovi.

(ii) Dva spoljašnja ili dva unutrašnja ugla sa iste strane transverzale su suprotni uglovi.

(iii) Dva spoljašnja ili dva unutrašnja nesusedna ugla sa raznih strana transverzale su naizmenični uglovi.



Za nas će od interesa biti slučaj kad su prave PP' i QQ' paralelne[11]:

Na osnovu prethodne teoreme (smer $\Rightarrow$.) zaključujemo da su suprotni uglovi, na transverzali paralelnih pravih, suplementni. Direktna posledica te teoreme je i da su saglasni uglovi na transverzali paralelnih pravih kao i naizmenični uglovi među sobom podudarni. Moguće je iskazati i teoreme slične prethodnoj u kojima se umesto o suprotnim govori o saglasnim ili naizmeničnim uglovima. Dokažimo sada sledeću značajnu teoremu:

Teorema 2. (*O uglovima sa paralelnim kracima.*) Neka su pOq i $p'Oq'$ dva konveksna ugla neke ravni sa kracima takvim da je $p \| p'$ i $q \| q'$. Tada:

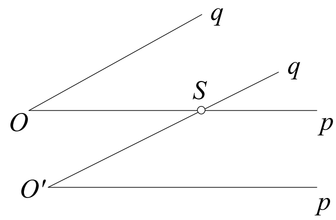
(i) Ako su oba ugla oštra ili oba tupa tada su oni podudarni.

(ii) Ako je jedan ugao oštar a jedan tup tada su oni suplementni.

Dokaz: Neka su p_1, q_1, p'_1, q'_1 prave odre|ene kracima p, q, p', q' datih uglova. Kako je $p_1 \| p'_1$, prava q'_1 mora seći pravu p_1 u nekoj tački S. Jedan

[11] O uglovima na transverzali paralelnih pravih piše *Euklid iz Aleksandrije* (*III* v. pre n. e.), u svom čuvenom delu *"Elementi"*.

od uglova koji odre|uju prave p_1 i q'_1 označimo sa α. Sada je prava q'_1 transverzala paralelnih pravih p_1 i p'_1 , a prava p_1 transverzala paralelnih pravih q_1 i q'_1. Tako je svaki od uglova pOq i $p'Oq'$ kao ugao na odgovarajućoj transverzali podudaran ili suplementan uglu α. Dakle, i uglovi pOq i $p'Oq'$ su podudarni ili suplementni. Naravno, ako su oba oštra ne mogu biti suplementni pa su podudarni. Slično ako je jedan ugao oštar a jedan tup tada moraju biti suplementni. ❑



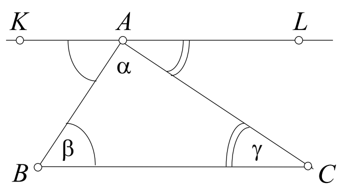
Prethodna teorema može se iskazati u obliku:

* Ako su AOB, $A'O'B'$ uglovi iste orijentacije, tako da je $AO \| A'O'$ i $BO \| B'O'$, tada su oni podudarni.

Sada ćemo razmatrati tzv. *uglove trougla*. Pod uglovima trougla podrazumevamo sve konveksne uglove određene pravama koje sadrže ivice tog trougla a čiji kraci sadrže bar jednu ivicu. Uglovi trougla čiji kraci sadrže po dve ivice tog trougla zovu se *unutrašnji uglovi trougla*. Ostali se zovu *spoljašnji uglovi trougla*. Analogno se mogu definisati i unutrašnji i spoljašnji uglovi proizvoljnog *n*-tougla. Ranije smo napomenuli da je bez Plejferove aksiome moguće dokazati da zbir unutrašnjih uglova trougla nije veći od opruženog ugla tj. 180^o. Sada, koristeći teoreme o transverzali paralelnih pravih, koje su posledica Plejferove aksiome, možemo dokazati da u euklidskoj geometriji važi sledeće tvrđenje[12]:

Teorema 3. Zbir unutrašnjih uglova trougla jednak je opruženom uglu. Tj. ako su α, β, γ unutrašnji uglovi nekog trougla, tada je: $\alpha+\beta+\gamma=180^o$.

Dokaz: Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC koji odgovaraju temenima A, B, C redom. Neka je p prava koja sadrži teme A i paralelna je sa pravom BC. Sa K i L označimo tačke na pravoj p takve da je $K,C \div AB$ i $L,B \div AC$. Tada su uglovi KAB i



[12] Pretpostavlja se da je ovo tvrđenje prvi dokazao satrogrčki filozof i matemetičar *Pitagora sa ostrva Samosa* (*VI* v. pre n. e.).

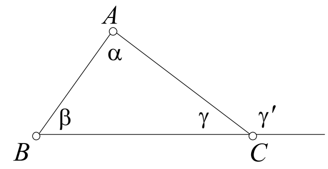
β i uglovi LAC i γ podudarni kao naizmenični na transverzali paralelnih pravih. Dakle:

$\alpha+\beta+\gamma=\angle BAC+\angle KAB+\angle LAC=\angle KAL$, a $\angle KAL$ je opruženi ugao. ❑

Ostaje nam da dokažemo još dve važne posledice prethodne teoreme. Radi se o odnosu spoljašnjeg ugla trougla prema unutrašnjim uglovima tog trougla.

Posledica 1. Spoljašnji ugao nekog trougla jednak je zbiru dva nesusedna unutrašnja ugla tog trougla.

Dokaz: Neka je γ' spoljašnji ugao nekog trougla, γ njemu susedan unutrašnji ugao i α i β preostala dva unutrašnja ugla tog trougla. Tada je na osnovu prethodne teoreme $\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$. Ali kako je i



$\gamma+\gamma'=180^{\circ}$, sledi da je $\gamma'=\alpha+\beta$, što je trebalo dokazati. ❑

Posledica 2. Spoljašnji ugao nekog trougla veći je od svakog nesusednog unutrašnjeg ugla tog trougla.

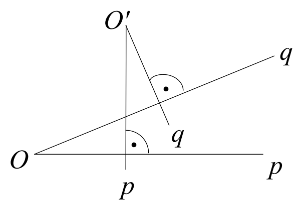
Dokaz: Direktno iz prethodne posledice jer je zbir dva ugla veći od svakog od njih. ❑

Dokaz sledeće važne teoreme prepuštamo čitaocu:

Teorema 2. (*O uglovima sa normalnim kracima.*) Neka su pOq i $p'Oq'$ dva konveksna ugla neke ravni sa kracima takvim da je $p\perp p'$ i $q\perp q'$. Tada:

(*i*) ako su oba ugla oštra ili oba tupa oni su podudarni;

(*ii*) ako je jedan ugao oštar a jedan tup oni su suplementni.



Kao teorema o uglovima sa paralelnim kracima i ova teorema se može iskazati u obliku:

- Ako su AOB, $A'O'B'$ uglovi iste orijentacije, tako da je $AO\perp A'O'$ i $BO\perp B'O'$, tada su oni podudarni.

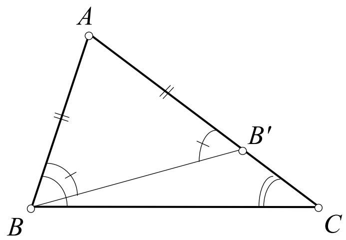
Zadaci

1. Dokazati da je zbir unutrašnjih uglova prostog četvorougla 360°.
2. Dokazati da je zbir unutrašnjih uglova prostog n-tougla jednak $(n-2)180^\circ$.
3. Dokazati da je zbir spoljašnjih uglova trougla 360°.
4. Ako dva ugla imaju paralelne krake njihove bisektrise su paralelne ili normalne. Dokazati.

3.7 Nejednakost trougla

Dokažimo sada još dve teoreme kao posledice stavova o podudarnosti trouglova.

Teorema 1. Naspram veće ivice u trouglu je veći ugao tog trougla;
i obratno, naspram većeg ugla trougla je veća ivica.

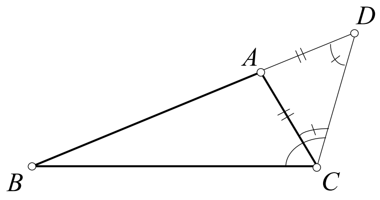


Dokaz: Neka je ABC trougao kod koga je $AC>AB$. Dokažimo da je tada $\angle ABC>\angle ACB$. Kako je $AC>AB$, postoji tačka B' između tačaka A i C takva da je $AB\cong AB'$. Tada je na osnovu ranije leme $\angle ABB'\cong\angle AB'B$. Poluprava BB' je unutar ugla ABC, pa je $\angle ABC>\angle ABB'$. Dalje, ugao $AB'B$ je spoljašnji ugao trougla BCB' pa je na osnovu ranije teoreme veći od njegovog nesusednog unutrašnjeg ugla $B'CB$. Koristeći sve dokazano sada je $\angle ABC>\angle ABB'\cong\angle AB'B>\angle B'CB=\angle ACB$. Dakle, zaista je $\angle ABC>\angle ACB$. Na sličan način dokazujemo i obratno. ❑

Teorema 2. (*Nejednakost trougla*) Zbir dve ivice trougla veći je od treće.

Dokaz: Neka je ABC proizvoljan trougao. Dokažimo da je $AB+AC>BC$. Sa D označimo tačku takvu da je $\mathcal{B}(B,A,D)$ i $AD\cong AC$.

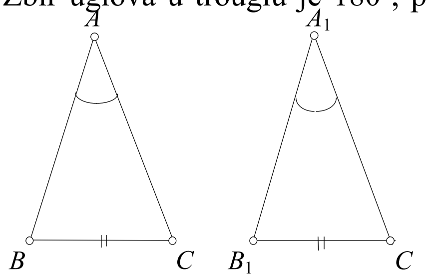
Na osnovu dokazane leme je tada $\angle BDC \cong \angle ACD$. Poluprava CA je unutar ugla DCB pa je $\angle ACD < \angle DCB$. Tada je i $\angle BDC < \angle DCB$. Primenjujući prethodnu teoremu na trougao BCD zaključujemo da je:



$$BC < BD = AB + AD = AB + AC. \ \square$$

Primer 1. Dva jednakokraka trougla su podudarna ako su im podudarne osnovice i uglovi naspram njih.

Rešenje: Neka su ABC i $A_1B_1C_1$ dva jednakokraka trougla sa podudarnim osnovicama BC i B_1C_1 i takva da je $\angle BAC \cong \angle B_1A_1C_1$. Na osnovu leme 1, je $\angle ABC \cong \angle ACB$ i $\angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_1C_1B_1$. Zbir uglova u trouglu je 180°, pa je:

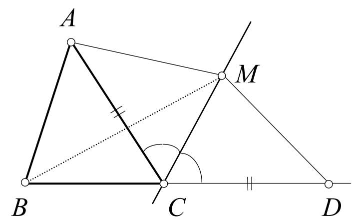


$\angle ABC \cong \angle ACB \cong \angle A_1B_1C_1 \cong \angle A_1C_1B_1$

$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$. Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su sada podudarni na osnovu stava USU ($BC \cong B_1C_1$, $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB \cong \angle A_1C_1B_1$).

Primer 2. Neka je M proizvoljna tačka bisektrise spoljašnjeg ugla kod temena C, trougla ABC. Dokazati da je: $MA + MB \geq CA + CB$.

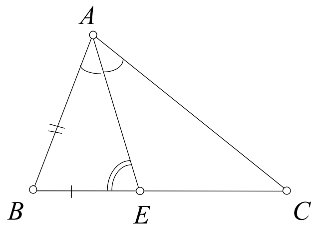
Rešenje: Neka je D tačka poluprave BC, takva da je $AC \cong CD$ i $\mathcal{B}(A,C,D)$. Tada je $BD = CA + CB$. Dalje, trouglovi ACM i DCM su podudarni na osnovu stava SUS ($AC \cong DC$, $CM \cong CM$, $\angle ACM \cong \angle DCM$), pa je $MA \cong MD$. Sada, primenjujući nejednakost trougla zaključujemo:



$$MA + MB = MD + MB \geq BD = CA + CB.$$

Naravno, jednakost važi u slučaju kad su tačke B, M, D kolinearne tj. $M = C$.

Primer 3. Ako je E presečna tačka ivice BC trougla ABC sa bisektrisom unutrašnjeg ugla tog trougla u temenu A, dokazati da je $AB>BE$ i $AC>CE$.



Rešenje: Kako je $\mathcal{B}(B,E,C)$, ugao AEB je spoljašnji ugao trougla AEC pa je: $\angle BEA>\angle EAC\cong\angle BAE$. Naspram većeg ugla u trouglu BAE je veća ivica tj. $AB>BE$. Na sličan način dokazujemo da važi i druga relacija.

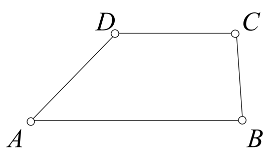
Zadaci

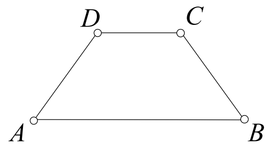
1. Neka su p i q dve normalne prave koje se seku u tački A. Ako su B, B' i C, C' tačke na pravama p i q takve da $AB\cong AC'$, $AB'\cong AC$ i $\mathcal{B}(B,A,B')$, $\mathcal{B}(C,A,C')$, dokazati da normala iz tačke A na pravoj BC sadrži središte duži $B'C'$.
2. Neka je S tačka koja pripada uglu pOq. Ako su A i B podnožja upravnih iz tačke S na kracima p i q tog ugla, dokazati da je $SA\cong SB$ ako i samo ako je poluprava OS bisektrisa ugla pOq.
3. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog četvorougla veći od zbira dve naspramne ivice.
4. Neka su ABC i $A'B'C'$ trouglovi takvi da je $AB\cong A'B'$ i $AC\cong A'C'$. Dokazati ekvivalenciju:
$$BC>B'C' \Leftrightarrow \angle BAC>\angle B'A'C'.$$

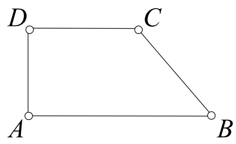
3.8 Četvorougao, paralelogram, srednja linija trougla

Sada ćemo detaljnije proučiti neke vrste četvorouglova, figure definisane još u odeljku 2.2. Napomenimo da ćemo nadalje pod četvorouglom podrazumevati prost četvorougao. Dve ivice četvorougla sa zajedničkim temenom zvaćemo *susedne ivice*, a one koje nemaju zajedničkih tačaka *naspramne ivice*. Unutrašnji uglovi čiji kraci sadrže istu ivicu četvorougla zovu se *susedni uglovi* a inače su oni *naspramni uglovi*. Uvedimo sada specijalnu vrstu četvorouglova.

Definicija. Četvorougao $ABCD$ je *trapez* ako je $AB \| CD$. Ivice AB i CD su *osnovice*, a BC i AD *kraci* tog trapeza. Trapez je *jednakokraki* ako je $BC \cong AD$ i nije $BC \| AD$, a *pravougli* ako je jedan njegov unutrašnji ugao prav.

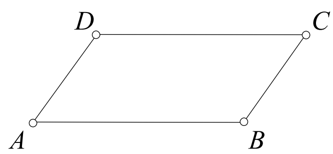






Na osnovu teorema o uglovima na transverzali paralelnih pravih, dva unutrašnja ugla koja odgovaraju kraku trapeza su suplementna. Takođe, to je dovoljan uslov da bi neki četvorougao bio trapez. Sada ćemo uvesti još jednu vrstu četvorouglova, koji predstavljaju specijalnu vrstu trapeza. Radi se o paralelogramima. Njih možemo definisati na razne načine, ali mi ćemo izabrati onaj najprirodniji, a za sve ostale ćemo dokazati da su sa tim ekvivalentni.

Definicija. Četvorougao $ABCD$ je *paralelogram* ako je $AB \| CD$ i $AD \| BC$.



Dakle, paralelogram je četvorougao sa dva para paralelnih naspramnih ivica. U samoj definiciji paralelograma nije korišćen pojam podudarnosti. Naime paralelogrami (a takođe i trapezi) se mogu razmatrati i u tzv. *afinoj geometriji*. To je geometrija zasnovana na svim grupama aksioma euklidske geometrije, osim treće grupe, aksioma podudarnosti. Pojam paralelograma će biti značajan i kod uvođenja vektora, u idućoj glavi. Dokažimo sada sledeću teoremu:

Teorema 1. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao. Tada su sledeći iskazi

ekvivalentni:

(1) četvorougao $ABCD$ je paralelogram.

(2) Svaka dva susedna unutrašnja ugla četvorougla, su suplementni uglovi.

(3) Parovi naspramnih uglova četvorougla su parovi podudarnih uglova.

(4) $AB \| CD$ i $AB \cong CD$[13].

(5) $AB \cong CD$ i $AD \cong BC$.

(6) Dijagonale četvorougla se uzajamno polove tj. AC i BD imaju zajedničko središte.

Dokaz: Označimo sa α, β, γ, δ unutrašnje uglove koji odgovaraju temenima A, B, C, D redom, četvorougla $ABCD$. Četvorougao je konveksan pa se njegove dijagonale seku u nekoj tački S.

Potrebno je dokazati ekvivalentnost iskaza (1)-(6). Da bismo izbegli dokazivanje svih ekvivalencija (po dve implikacije) npr. sa (1), dokaz ćemo pojednostaviti dokazujući implikacije rukovodeći se sledećom šemom:

$$\begin{array}{ccccc} (1) & \Leftarrow & (2) & \Leftarrow & (3) \\ \Downarrow & & & & \Uparrow \\ (4) & & \Rightarrow & & (5) \Leftrightarrow (6) \end{array}$$

Kao što vidimo to je dovoljno jer npr. implikaciju (1)$\Rightarrow$(2) dokazujemo direktno koristeći: (1)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(1). Neka su uglovi α i β suplementni. Oni su suprotni uglovi na transverzali AB pravih AD i BC pa je tada $AD \| BC$. Slično, na osnovu suplementnosti uglova β i γ, dokazujemo da je i $AB \| CD$, pa je četvorougao $ABCD$ paralelogram.

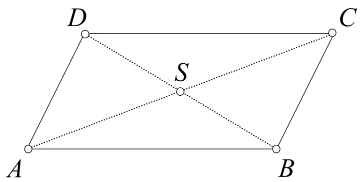
(3)$\Rightarrow$(2). Neka je $\alpha=\gamma$ i $\beta=\delta$. Kako je $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360^o$ (zbir unutrašnjih uglova svakog četvorougla je 360^o jer se dijagonalom može podeliti na dva trougla od kojih svaki ima zbir unutrašnjih uglova 180^o), sledi da je $\alpha+\beta=180^o$ i $\beta+\gamma=180^o$.

(1)$\Rightarrow$(4). Neka je četvorougao $ABCD$ paralelogram. Tada je $AB \| CD$ i $AD \| BC$. Prava AC je transverzala paralelnih pravih AB i CD pa su uglovi CAB i ACD podudarni kao naizmenični. Slično iz paralelnosti pravih AD i BC sledi da su i uglovi ACB i CAD podudarni. Kako je $AC \cong AC$ na osnovu stava *USU* su trouglovi ACB i CAD podudarni pa je i $AB \cong CD$.

(4)$\Rightarrow$(5). Neka je $ABCD$ četvorougao takav da je $AB \| CD$ i $AB \cong CD$. Dokažimo da je i $AD \cong BC$. Prava AC je transverzala paralelnih pravih AB i CD pa su uglovi CAB i ACD podudarni kao naizmenični. Koristeći činjenicu da je $AC \cong AC$ na osnovu stava *SUS* zaključujemo da su trouglovi ACB i CAD podudarni. Na osnovu toga je i $BC \cong AD$.

[13] Ovaj ekvivalent, u nešto izmenjenom obliku, navodi *Euklid iz Aleksandrije* (*III* v. pre n. e.), u svom čuvenom delu *"Elementi"*.

(5)⇒(3). Neka je $ABCD$ četvorougao takav da je $AB\cong CD$ i $AD\cong BC$. Dokažimo da je $\beta=\delta$ i $\alpha=\gamma$. Zaista kako je $AC\cong AC$ prema stavu *SSS* je $\Delta ACB\cong\Delta CAD$. Tada je i $\angle ABC\cong\angle CDA$ tj. $\beta=\delta$. Slično dokazujemo i da je $\alpha=\gamma$.



(5)⇔(6). Neka je $ABCD$ četvorougao takav da je $AB\cong CD$ i $AD\cong BC$. Dokažimo da je tačka S zajedničko središte dijagonala AC i BD. Kako je $AC\cong AC$ na osnovu stava *SSS* je $\Delta ACB\cong\Delta CAD$. Na osnovu toga je $\angle ACB\cong\angle CAD$ pa je i $\angle SCB\cong\angle SAD$. Iz podudarnosti unakrsnih uglova CSB i ASD sledi da su i uglovi SBC i SDA podudarni. Koristeći sada da je $AD\cong BC$, na osnovu stava *USU*, zaključujemo da je $\Delta CSB\cong\Delta ASD$. Na osnovu toga je $SB\cong SD$ i $SC\cong SA$ tj. tačka S je zajedničko središte dijagonala AC i BD.

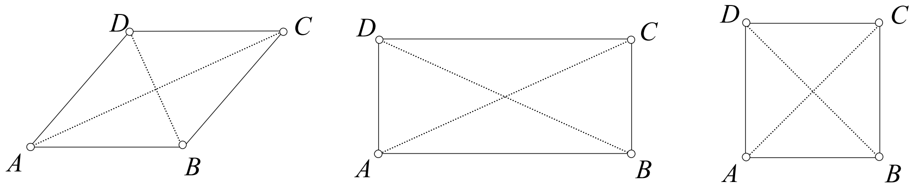
Obratno, neka je S zajedničko središte dijagonala AC i BD. Tada je $SB\cong SD$ i $SC\cong SA$. Takođe, podudarni su i unakrsni uglovi CSB i ASD pa je na osnovu stava *SUS* $\Delta CSB\cong\Delta ASD$. Tada je $AD\cong BC$. Slično dokazujemo i da je $AB\cong CD$. ❑

Čitaocu preporučujemo da dokaže prethodnu teoremu koristeći se nekom sličnom šemom. Uvedimo sada još neke vrste četvorouglova za koje se pokazuje da su takođe paralelogrami.

Definicija. *a*) četvorougao kod koga su sve ivice podudarne naziva se *romb*.

b) četvorougao kod koga su svi unutrašnji uglovi podudarni i jednaki 90° naziva se *pravougaonik*.

c) četvorougao kod koga su sve ivice podudarne i svi unutrašnji uglovi podudarni naziva se *kvadrat*.



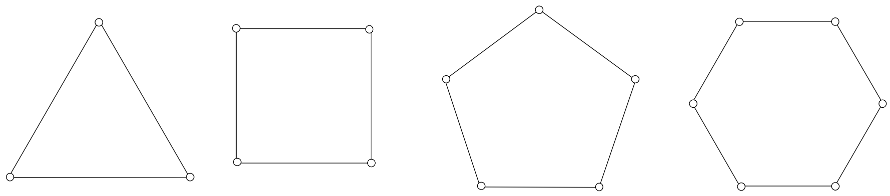
Zaista lako se dokazuje da je svaki od navedenih četvorouglova ujedno i paralelogram. To je direktna posledica prethodne teoreme. Romb je paralelogram na osnovu (5)⇒(1), a pravougaonik na osnovu (2)⇒(1) ili (3)⇒(1). Za kvadrat je jasno da je ujedno pravougaonik i romb pa je samim tim i paralelogram.

Dokaz sledeće teoreme prepuštamo čitaocu:

Teorema 2. *a*) Paralelogram je romb ako su mu dijagonale međusobno normalne.
b) Paralelogram je pravougaonik ako su mu dijagonale međusobno podudarne.
c) Paralelogram je kvadrat ako su mu dijagonale međusobno normalne i podudarne.

Pojam kvadrata uklapa se u opštu definiciju specijalne vrste mnogouglova:

Definicija. Mnogougao je *pravilan* ako su mu sve ivice i svi unutrašnji uglovi međusobno podudarni.

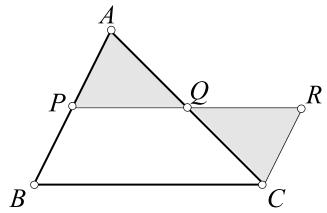


Kvadrat je dakle pravilan četvorougao. Pravilan trougao naziva se i *jednakostraničan* trougao. Ovo ime, opravdava činjenica da je za neki trougao dovoljno da su mu sve ivice podudarne da bi bio pravilan. To je posledica leme iz prethodnog odeljka.

Definicija. Duž čije su krajnje tačke središta dveju ivica nekog trougla naziva se *srednja linija* tog trougla koja odgovara njegovoj trećoj ivici.

Teorema 4. *(O srednjoj liniji trougla)* Ako su P i Q središta ivica AB i AC redom tada je:

$$PQ=\frac{1}{2}BC \text{ i } BC\|PQ.$$



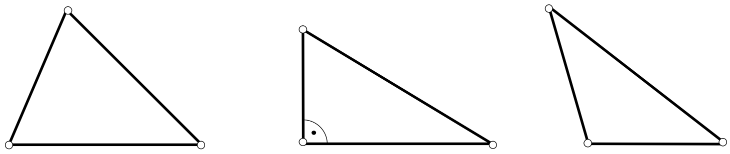
Dokaz: Označimo sa R tačku takvu da je $PQ \cong QR$ i $\mathcal{B}(P,Q,R)$. Tada duži AC i PR imaju zajedničko središte pa je, na osnovu teoreme 1, četvorougao $APCR$ paralelogram. Koristeći opet istu teoremu zaključujemo da su duži AP i RC podudarne i paralelne. Tačka P je središte duži AB pa su i duži PB i RC podudarne i paralelne. Opet, na osnovu teoreme 1, četvorougao $PBCR$ je paralelogram. Tada su i duži BC i PR podudarne i paralelne prema istoj teoremi. Konačan zaključak sada sledi iz činjenice da je tačka Q središte duži PR. ❑

Zadaci

1. Dokazati da se bisektrise unutrašnjih uglova pravougaonika (koji nije kvadrat) seku u tačkama koje su temena jednog kvadrata.
2. Bisektrise unutrašnjih uglova paralelograma (koji nije romb) seku se u tačkama koje su temena jednog pravougaonika, čije su dijagonale paralelne ivicama paralelograma i jednake razlici susednih ivica tog paralelograma. Dokazati.
3. Dokazati da središta ivica proizvoljnog četvorougla predstavljaju temena jednog paralelograma.
4. Ako su P i Q središta krakova AD i BC trapeza $ABCD$ dokazati da je: $AB+CD=2PQ$. (Duž PQ se naziva *srednja linija trapeza*.)
5. Ako su K i L presečne tačke srednje linije trapeza $ABCD$ sa njegovim dijagonalama; gde je $AB \| CD$ i $AB>CD$, dokazati da je tada: $AB-CD=2KL$.

3.9 Značajne tačke trougla

Na osnovu unutrašnjih uglova trougla možemo razmatrati tri vrste trouglova. Trougao je *oštrougli* ako su mu svi unutrašnji uglovi oštri; *tupougli* je ako ima jedan unutrašnji tup ugao a *pravougli* je ako mu je jedan unutrašnji ugao prav. Ivica naspram pravog ugla pravouglog trougla naziva se *hipotenuza* a ostale dve su *katete*, tog trougla. Na osnovu ranije dokazane teoreme (naspram većeg ugla trougla je veća ivica) možemo zaključiti da je hipotenuza pravouglog trougla veća od svake katete. Analogno, ivica naspram tupog ugla tupouglog trougla je njegova najveća ivica.

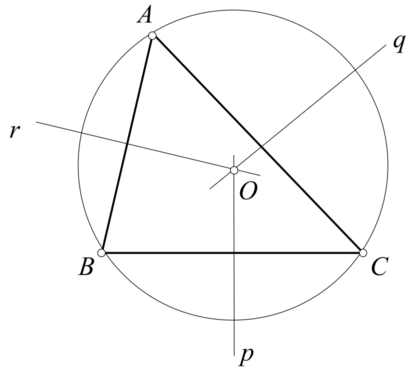


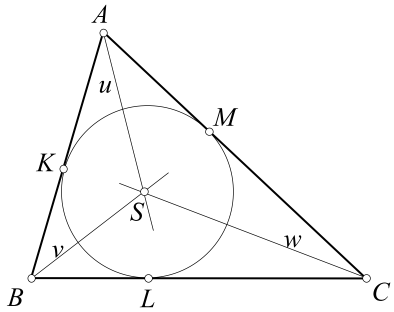
Iako naizgled jednostavan, trougao je figura sa neočekivano mnogo interesantnih svojstava. Neka od njih ćemo sada razmotriti i ona će biti vezana za četiri karakteristične tačke koje nazivamo značajne tačke trougla.

Teorema 1. *(O centru opisanog kruga)* Medijatrise ivica nekog trougla seku se u jednoj tački.

Dokaz: Neka su p, q, r medijatrise ivica BC, CA, AB trougla ABC. Dokažimo najpre da se prave p i q seku. Pretpostavimo suprotno tj. da su one paralelne i disjunktne. Na osnovu posledica Plejferove aksiome, kako prava AC seče pravu q, mora seći i njoj paralelnu pravu p. Prema teoremi o uglovima na transverzali je prava AC normalna i na pravoj p. Iz tačke C bi tada postojale dve normale na pravoj p što nije moguće. Dakle, medijatrise p i q seku se u nekoj tački O. Tačka O je na medijatrisi duži BC pa je $OA \cong OB$ (zadatak 1, odeljak 3.6.). Takođe je i na medijatrisi duži AC pa je $OA \cong OC$. Tada je i $OA \cong OB$ tj. tačka O je i na medijatrisi r duži AB. ❑

Tačka O iz prethodne teoreme je, dakle, podjednako "udaljena" od temena A, B, C trougla ABC, pa, prema tome, predstavlja centar jednog kruga koji sadrži sva tri temena tog trougla. Taj krug naziva se *opisani krug* trougla. Na osnovu prethodne teoreme oko svakog trougla može se opisati krug.





Teorema 2. *(O centru upisanog kruga)* Bisektrise unutrašnjih uglova trougla seku se u jednoj tački.

Dokaz: Neka su u, v, w bisektrise unutrašnjih uglova α, β, γ kod temena A, B, C redom, trougla ABC. Ako bi prave određene polupravama v i w bile paralelne, na osnovu teoreme o transverzali paralelnih pravih bilo bi $\alpha/2+\beta/2=180^{\circ}$. To nije moguće, jer je već $\alpha+\beta<180^{\circ}$, pa se bisektrise v i w seku u nekoj tački S. Neka su K, L, M podnožja upravnih iz tačke S na ivicama AB, BC, AC redom. Trouglovi BSK i BSL su podudarni na osnovu stava USU jer su im svi uglovi podudarni, a imaju jednu zajedničku ivicu. Tada je $SK\cong SL$. Analogno, kako je tačka S na pravoj w, dokazujemo da je $SL\cong SM$. Koristeći tranzitivnost zaključujemo da je $SK\cong SM$. Sada je $SA\cong SA$, $SK\cong SM$, $\angle AKS\cong\angle AMS=90^{\circ}$, a uglovi KAS i MAS su oba oštra, pa su na osnovu stava SSU trouglovi AKS i AMS podudarni. Sledi da je $\angle KAS\cong\angle MAS$, pa je poluprava AS bisektrisa ugla α. Dakle, tačka S pripada i polupravoj u. ❑

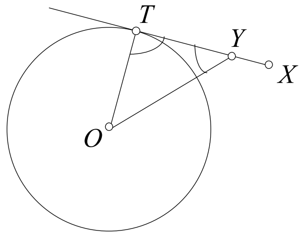
Pre nego što utvrdimo šta predstavlja tačka S iz prethodne teoreme, uvedimo sledeći pojam:

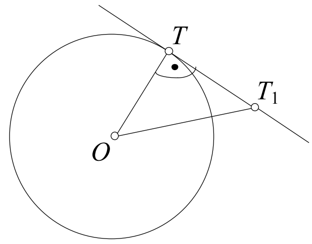
Definicija. Prava p neke ravni je *tangenta* kruga k te ravni u tački T ako je T njihova jedina zajednička tačka. Kaže se da u tom slučaju prava p *dodiruje* krug k u tački T.

Dokažimo sledeći potreban i dovoljan uslov da je neka prava tangenta kruga:

Teorema 3. Neka je T tačka kruga $k(O,r)$. Prava je PT tangenta tog kruga u tački T akko je $PT\perp TO$.

Dokaz: $\Rightarrow$. Neka je PT tangenta kruga k u tački T. Ako ugao PTO nije prav, jedan od uglova koji određuju prave PT i TO je oštar. Neka je to ugao $\angle OTX=\omega<90^o$. Neka je l poluprava poluravni OTX sa početkom u tački O, takva da je $\angle OT,l=180^o-2\omega$. Ako je Y presečna tačka polupravih TX i l, trougao OTY je jednakokraki ($\angle OTY=\angle OYT=\omega$), pa je $OT=OY=r$. To nije moguće jer je PT tangenta kruga k, pa sa njim ima samo jednu zajedničku tačku. Dakle, ugao PTO je prav.





$\Leftarrow$. Neka je $PT\perp TO$. Za svaku tačku $T_1\in PT$ trougao OTT_1 je pravougli sa hipotenuzom OT_1, pa je $OT_1>OT=r$. Dakle, proizvoljna tačka T_1 prave PT ne pripada krugu k, pa je PT zaista tangenta tog kruga. ❑

Tačka S iz teoreme 2, je dakle centar kruga koji sadrži tačke K, L, M. Osim toga prave određene ivicama trougla su na osnovu prethodno dokazanog tangente tog kruga. Zbog toga se pomenuti krug zove *upisani krug* trougla, a na osnovu teoreme 2, u svaki trougao se može upisati krug.

Pre nego što pređemo na razmatranje druge dve značajne tačke uvedimo dva pojma:

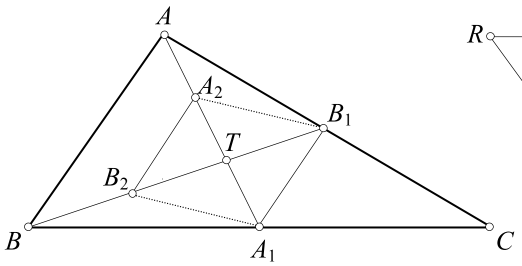
Definicija. Duž čija je jedna krajnja tačka teme trougla a druga središte naspramne ivice naziva se *težišna duž* tog trougla.

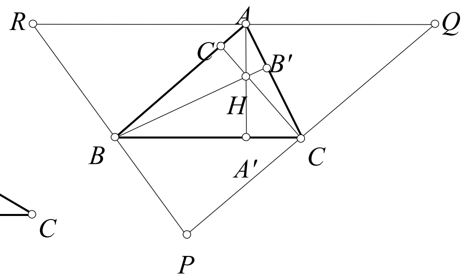
Definicija. Duž čija je jedna krajnja tačka teme trougla a druga podnožje upravne iz tog temena na pravoj određenoj naspramnom ivicom naziva se *visina* tog trougla.

Teorema 4. *(O težištu)* Težišne duži trougla seku se u jednoj tački, koja ih deli u odnosu 2:1, i to tako da je $AT=2TA_1$; gde su: A teme trougla, A_1 središte naspramne ivice i T ta presečna tačka.

Dokaz: Neka su A_1, B_1, C_1 središta ivica BC, CA, AB redom trougla ABC. Primenom Pašove aksiome može se dokazati da se težišne duži AA_1 i BB_1 seku u nekoj tački, označimo je sa T. Sa A_2 i B_2 označimo središta duži AT i BT. Duž A_1B_1 je srednja linija trougla ABC koja odgovara ivici AB

pa je sa njom paralelna i $A_1B_1=\frac{1}{2}AB$. Takođe je B_2A_2 srednja linija trougla TAB koja odgovara ivici AB pa je i ona sa njom paralelna i $A_2B_2=\frac{1}{2}AB$. Na osnovu ranije teoreme o paralelogramu, zaključujemo da je četvorougao $A_1B_1A_2B_2$ paralelogram, pa mu se dijagonale polove u tački T. Dakle, sada je $AA_2 \cong A_2T \cong TA_1$ i $BB_2 \cong B_2T \cong TB_1$ tj. $AT:TA_1 = BT:TB_1 = 2:1$. Potrebno je još dokazati i da težišna duž CC_1 takođe sadrži tačku T i da je $CT:TC_1=2:1$. Na isti način kao u prethodnom slučaju možemo dokazati i da se težišne duži CC_1 i AA_1 seku u nekoj tački T_0 tako da je $CT_0:T_0C_1=AT_0:T_0A_1=2:1$. Ali kako je i $AT:TA_1=2:1$ to je $T_0=T$ (jedinstvenost podele duži biće dokazana u odeljku 8.1), čime je dokaz završen. ❑



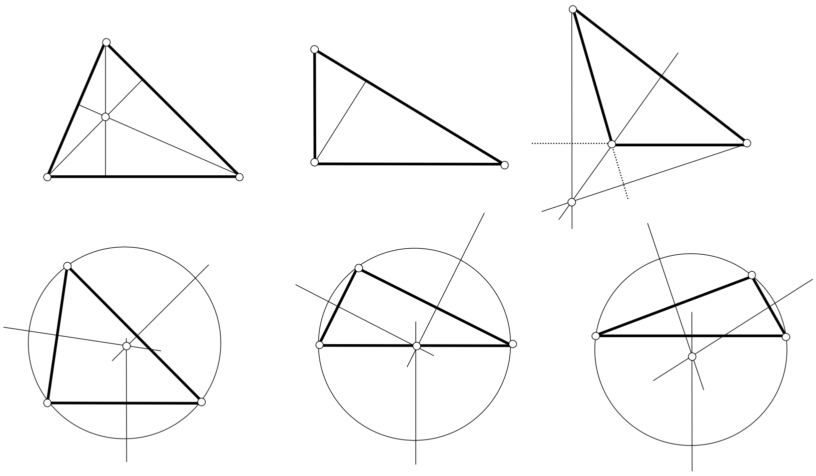


Tačka T iz prethodne teoreme naziva se *težište* trougla ABC.

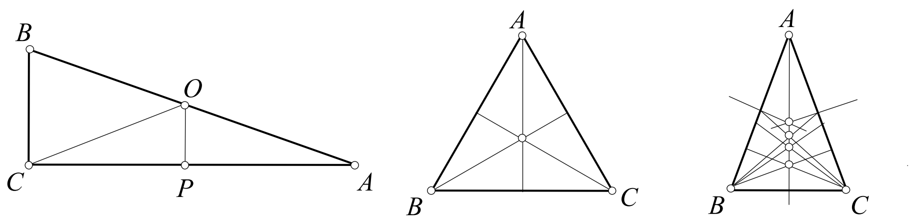
Teorema 5. *(O ortocentru)* Prave određene visinama nekog trougla seku se u jednoj tački.

Dokaz: Neka su p, q, r prave koje sadrže temena A, B, C redom trougla ABC, normalne na njegove odgovarajuće visine AA', BB', CC'. Prava AA' je zajednička normala pravih BC i p, pa je na osnovu teoreme o uglovima na transverzali $BC \| p$. Slično dokazujemo da je $AC \| q$ i $AB \| r$. Prave p i q ne mogu biti paralelne, jer bi tada bile paralelne i prave BC i AC, što nije moguće. Dakle, prave p i q se seku i njihovu presečnu tačku označimo sa R. Presečnu tačku pravih p i r označimo sa Q a pravih q i r sa P. Četvorougao $BCQA$ je paralelogram jer je $BC \| QA$ i $AB \| QC$. Na osnovu teoreme o paralelogramu je $BC \cong QA$. Slično dokazujemo da je i četvorougao $BCAR$ paralelogram pa je $BC \cong AR$. Dakle, važi i $QA \cong AR$ tj. tačka A je središte ivice RQ trougla PQR a prava AA' odgovarajuća medijatrisa. Analogno, i prave BB' i CC' su medijatrise ivica trougla PQR. Na osnovu teoreme 1, prave AA', BB', CC' seku se u nekoj tački H. ❑

Tačka H iz prethodne teoreme naziva se *ortocentar* trougla ABC. Centri opisanog i upisanog kruga, težište i ortocentar trougla zovu se *značajne tačke trougla*.



Razmotrimo još u kakvom su položaju značajne tačke u zavisnosti od vrste trougla. Težišne duži su uvek u unutrašnjoj oblasti trougla. Na osnovu toga možemo zaključiti da je kod svakog trougla težište u njegovoj unutrašnjosti. Isti zaključak važi i za centar upisanog kruga. Kod oštrouglog trougla podnožja upravnih iz temena su na samim ivicama pa se same visine seku. Dakle, kod oštrouglog trougla ortocentar je u njegovoj unutrašnjosti. Kod pravouglog trougla ortocentar je teme kod pravog ugla. Ortocentar tupouglog trougla je u njegovoj spoljašnjosti. Centar opisanog kruga je u unutrašnjoj ili spoljašnjoj oblasti trougla u zavisnosti da li je on oštrougli ili tupougli. To ovde nećemo dokazivati. Dokažimo samo sledeće tvrđenje:



Teorema 6. Centar opisanog kruga pravouglog trougla je središte njegove hipotenuze.

Dokaz. Označimo sa O središte hipotenuze AB pravouglog trougla ABC. Neka je P središte njegove katete AC. Tada je OP srednja linija tog trougla koja odgovara kateti BC pa je sa njom paralelna. Iz toga sledi da $OP \perp AC$. Na osnovu stava *SUS* trouglovi OPC i OPA su podudarni pa je $OC \cong OA$. Kako je $OB \cong OA$, sledi da je tačka O kao središte hipotenuze centar opisanog kruga tog trougla. ❑

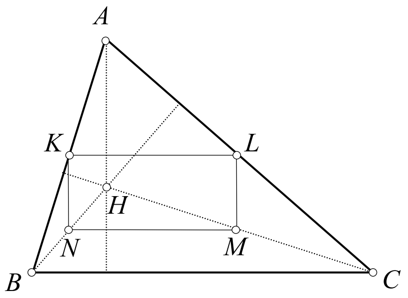
Na osnovu prethodno dokazanog možemo izvesti još dva zaključka:

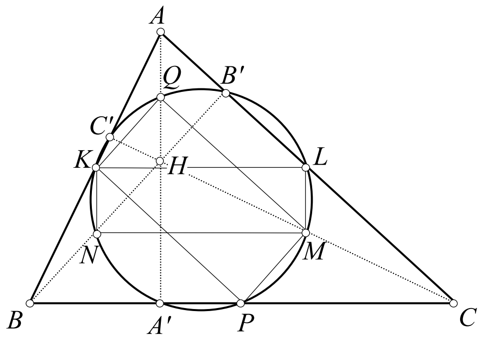
1. *Težišna duž koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla jednaka je njenoj polovini.*
2. *Ugao nad prečnikom kruga je prav.*

Kod pravilnog trougla sve značajne tačke se poklapaju. Tu tačku tada zovemo *centar* tog trougla. Kod jednakokrakog trougla težišna duž, visina, medijatrisa osnovice i bisektrisa unutrašnjeg ugla naspram nje pripadaju jednoj pravoj. Iz toga sledi da su i značajne tačke tog trougla na toj pravoj.

Primer 1. Neka je H ortocentar trougla ABC. Ako su K, L, M, N, središta duži AB, AC, HC, HB, dokazati da je četvorougao $KLMN$ pravougaonik.

Rešenje: Duži KL i MN su srednje linije trouglova ABC i HBC i odgovaraju istoj ivici BC, pa su kao takve podudarne i paralelne ($KL \cong MN = \frac{1}{2}BC$; $KL, MN \| BC$). Dakle, četvorougao $KLMN$ je paralelogram. Dovoljno je dokazati još i da mu je jedan ugao prav. Ali, duž KN je srednja linija trougla ABH, pa je paralelna sa AH tj. sa visinom trougla iz temena A. Dakle, KN je upravna na ivici BC, odnosno njoj paralelnoj duži KL, pa je paralelogram $ABCD$ zaista pravougaonik.





> ***Primer 2.*** Dokazati da središta ivica, podnožja visina i središta duži određenih ortocentrom i temenima proizvoljnog trougla pripadaju jednom krugu. (*Ojlerov*[14] *krug* trougla ili *krug devet tačaka*)

Rešenje: Koristićemo tvrđenje dokazano u prethodnom primeru. Ako su dakle, oznake iste kao u tom primeru, četvorougao *KLMN* je pravougaonik. Slično ako je *P* središte ivice *BC* i *Q* središte duži *AH* tada je i *PMQK* takođe pravougaonik. Kako je *KM* zajednička dijagonala tih pravougaonika oko njih se može opisati krug (nad *KM* kao prečnikom). Ostaje da dokažemo da i podnožja visina pripadaju tom krugu. Ali tačka *A*', kao podnožje visine iz temena *A*, pripada tom krugu jer je ugao *QA*'*P* prav (a *PQ* prečnik kruga). Slično se dokazuje i za preostale dve tačke.

Zadaci

1. Dokazati da se izometrijskom transformacijom paralelne prave preslikavaju u paralelne prave.
2. Neka je S jedina fiksna tačka izometrije $\mathcal{I} : E^2 \to E^2$. Ako ta izometrija preslikava neku pravu p te ravni u samu sebe dokazati da tada $S \in p$.

[14] *L. Ojler* (1707-1783), švajcarski matematičar, dokazao je da trougao određen podnožjima visina, i trougao određen središtima ivica nekog trougla imaju zajednički opisani krug. Da pomenutih devet tačaka pripada jednom krugu dokazali su 1821 g. francuski geometričari *Ž. V. Ponsele* (1788-1867) i *Š. Ž. Brijanšon* (1783-1864).

3. Ako su p, q, r prave neke ravni takve da je $p \| q$ i $r \perp p$, dokazati da je tada $r \perp q$.
4. Dokazati da su bisektrise dva naporedna ugla među sobom normalne.
5. Ako su B' i C' podnožja visina iz temena B i C trougla ABC dokazati ekvivalenciju: $AB \cong AC \Leftrightarrow BB' \cong CC'$
6. Ako su kod nekog trougla ortocentar i centar opisanog kruga ista tačka, dokazati da je trougao pravilan. Da li slično tvrđenje važi za bilo koje dve značajne tačke trougla?
7. Dokazati da su oštrougli trouglovi ABC i $A'B'C'$ podudarni ako su im podudarne visine CD i $C'D'$, ivice AB i $A'B'$ i uglovi ACD i $A'C'D'$.
8. Ako je $ABCD$ pravougaonik i ako su trouglovi AQB i APD pravilni i isto orijentisani, dokazati da je duž PQ podudarna dijagonali tog pravougaonika.
9. Neka su BB', CC' visine trougla ABC ($AC>AB$) i D tačka poluprave AB takva da je $AD \cong AC$. Ako je E presek prave BB' i prave koja je u tački D paralelna sa AC, dokazati da je $BE=CC'-BB'$.
10. Neka je $ABCD$ konveksni četvorougao kod koga je $AB \cong BC \cong CD$ i $AC \perp BD$. Dokazati da je $ABCD$ romb.
11. Neka je H ortocentar trougla ABC kod koga je $CH \cong AB$. Odrediti meru ugla ACB.
12. Neka je BC osnovica jednakokrakog trougla ABC. Ako su K i L tačke takve da je $\mathcal{B}(A,K,B)$ i $\mathcal{B}(A,C,L)$ i $KB \cong LC$, dokazati da osnovica BC sadrži središte duži KL.
13. Neka je S centar kruga upisanog u trougao ABC. Ako prava koja sadrži tačku S i paralelna je ivici BC tog trougla seče ivice AB i AC redom u tačkama M i N, dokazati da je $BM+NC=NM$.
14. Ako su P i Q središta ivica BC i CD paralelograma $ABCD$, dokazati da duži AP i AQ dele dijagonalu BD paralelograma na tri podudarne duži.
15. Neka je $ABCD$ proizvoljan četvorougao i neka su P, Q, K, L, M, N središta duži AB, CD, BC, AD, AC, BD redom. Dokazati da duži PQ, KL, MN imaju zajedničko središte.

16. Neka je $ABCDEFG$ konveksan sedmougao. Izračunati zbir konveksnih uglova koje određuje poligonalna linija $ACEGBDFA$.

17. Ako je CD visina nad hipotenuzom AB pravouglog trougla ABC i M i N središta duži CD i BD, dokazati da je $AM \perp CN$.

18. Dokazati da su središta ivica i podnožje proizvoljne visine trougla (kod koga nikoje dve ivice nisu podudarne), temena jednakokrakog trapeza.

19. Neka je ABC pravougli trougao sa pravim uglom kod temena C. Ako su E i F preseci bisektrisa unutrašnjih uglova kod temena A i B sa naspramnim katetama, a K i L podnožja upravnih iz tačaka E i F na hipotenuzi tog trougla, dokazati da je $\angle LCK = 45^\circ$.

20. Dokazati da se bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A i spoljašnjih uglova kod temena B i C trougla ABC seku u jednoj tački, koja je centar kruga koji dodiruje ivicu BC i prave AB i AC. (tzv *spolja upisani krug* trougla)

21. Ako je M unutrašnja tačka trougla ABC, dokazati da je:
$$AC+BC>AM+BM.$$

22. Ako je M unutrašnja tačka trougla ABC, a s njegov poluobim, dokazati da je:
$$s < AM+BM+CM < 2s.$$

23. Dokazati da je u svakom trouglu najviše jedna ivica manja od odgovarajuće visine.

24. Ako je AA_1 težišna duž trougla ABC, dokazati da je od uglova koje ona određuje sa ivicama AB i AC veći onaj koji određuje sa manjom ivicom.

25. Ako su BB_1 i CC_1 težišne duži trougla ABC, i $AB<AC$ dokazati da je $BB_1<CC_1$.

26. Ako su a, b, c ivice; t_a, t_b, t_c odgovarajuće težišne duži i s poluobim nekog trougla, dokazati:
$$(i)\ \frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2};\quad (ii)\ s < t_a+t_b+t_c < 2s;\quad (iii)\ t_a+t_b+t_c > \frac{3}{4}(a+b+c).$$

27. Ako su M i N središta ivica AB i CD proizvoljnog četvorougla $ABCD$, dokazati da je:

$$MN \leq \frac{1}{2}(BC+AD)$$

28. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog petougla veći od njegovog obima.

29. Ako su h_a, h_b, h_c visine koje odgovaraju ivicama a, b, c nekog trougla, dokazati da važi:
$$\frac{h_a}{b+c} + \frac{h_b}{a+c} + \frac{h_c}{a+b} < \frac{3}{2}.$$

30. Neka je M središte ivice CD kvadrata $ABCD$ i P tačka dijagonale AC takva da je $3AP=PC$. Dokazati da je ugao BPM prav.

31. Neka su P, Q, R središta ivica AB, BC, CD paralelograma $ABCD$. Ako prave DP i BR seku duž AQ u tačkama K i L dokazati da je $KL=\frac{2}{5}AQ$.

32. Neka je D središte hipotenuze AB pravouglog trougla ABC ($AC>BC$). Ako su E i F preseci polupravih CA i CB sa pravom koja je u tački D normalna na pravoj CD, a M središte duži EF, dokazati da je $CM \perp AB$.

33. Neka su $AKLB$ i $ACPQ$ kvadrati spolja konstruisani nad ivicama AB i AC trougla ABC. Dokazati da se duži BP i CL seku u tački koja pripada visini trougla ABC iz temena A.

34. Neka su A_1 i C_1 središta ivica BC i AB trougla ABC. Ako bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A seče duž A_1C_1 u tački P, dokazati da je ugao APB prav.

35. Ako su P i Q tačke ivica BC i CD kvadrata $ABCD$, takve da je poluprava PA bisektrisa ugla BPQ, odrediti meru ugla PAQ.

36. Neka je P središte osnovice BC jednakokrakog trougla ABC i Q podnožje upravne iz tačke P na kraku AC tog trougla. Ako je S središte duži PQ, dokazati da je $AS \perp BQ$.

37. (*i*) Dokazati da je centar opisanog kruga najbliži najvećoj stranici trougla.

(*ii*) Dokazati da je centar upisanog kruga najbliži temenu najvećeg ugla trougla.

38. Dokazati da u konveksnom petouglu postoje tri dijagonale koje su podudarne ivicama nekog trougla.

39. Ako je $ABCD$ konveksan četvorougao, odrediti tačku P tako da zbir $AP+BP+CP+DP$ bude minimalan.

40. Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza $ABCD$, osnovice AB, seku se u tački O i $\angle AOB=60^o$. Ako su P, Q, R središta duži OA, OD, BC redom, dokazati da je trougao PQR pravilan.

41. Ako su AB i $A'B'$ dve podudarne duži i C i D središta duži AA' i BB', takve da je $CD=\frac{1}{2}AB$, odrediti meru ugla koji određuju prave AB i $A'B'$.

42. Neka je ABC trougao kod koga je $\angle ABC=15^o$ i $\angle ACB=30^o$. Ako je D tačka ivice BC, takva da je ugao BAD prav, dokazati da je $BD=2AC$.

43. Ako je svaka tačka neke ravni "plava" ili "crvena", dokazati da u toj ravni postoji pravilan trougao čija su sva temena iste boje.

44. Ako su: a ivica i d, D najmanja i najveća dijagonala pravilnog devetougla, dokazati da je D-d=a.

45. Neka je O proizvoljna tačka u unutrašnjoj oblasti trougla ABC, takva da je $\angle OBA\cong\angle OCA$. Ako su P i Q podnožja upravnih iz te tačke na ivicama AB i AC, a A_1 središte ivice BC, dokazati da je $A_1P\cong A_1Q$.

46. Neka je CC' visina pravouglog trougla ABC ($\angle ACB=90^o$). Ako su O i S centri upisanih krugova trouglova ACC' i BCC', dokazati da je bisektrisa unutrašnjeg ugla $\angle ACB$ normalna na pravoj OS.

47. Ako su a, b, c ivice i α, β, γ odgovarajući uglovi trougla, dokazati da je:
$$60^0 \le \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < 90^0.$$

48. Neka je K središte ivice CD pravougaonika $ABCD$ i L podnožje upravne iz temena B na dijagonali AC. Ako je S središte duži AL, dokazati da je ugao KSB prav.

49. Dokazati da konveksan n-tougao ne može imati više od tri oštra ugla.

50. Ako su P, Q, R središta ivica BC, AC, AB trougla ABC ($AB<AC$) i D podnožje visine iz temena A, dokazati da je:
$\angle DRP\cong\angle DQP=\angle ABC-\angle ACB$.

51. Ako je (n,m) mreža pravilnih n-touglova kojih se po m sustiče u svakom temenu prekrivajući celu euklidsku ravan, odrediti sve moguće vrednosti za n i m [15].

52. Neka je AD odsečak bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC. Ako je E tačka ivice AB takva da je $\angle BDE \cong \angle BAC$, dokazati da je $DE \cong DC$.

53. Ako su BB' i CC' odsečci bisektrisa unutrašnjih uglova trougla ABC dokazati da je: $AB \cong AC \Leftrightarrow BB' \cong CC'$ (*Štajner-Lemusova*[16] *teorema*).

54. Neka su AP, BQ, CR redom visina, težišna duž i odsečak bisektrise trougla ABC. Ako je trougao PQR pravilan, dokazati da je i trougao ABC takođe pravilan.

55. Neka su $ABCD$, $AEBK$, $CEFG$ kvadrati neke ravni istih orijentacija. Dokazati da su B, D, F kolinearne tačke i da je tačka B središte duži DF.

56. Neka je O centar kvadrata $ABCD$. Ako su P, Q, R tačke koje dele njegov obim na tri jednaka dela, dokazati da se minimum zbira $OP+OQ+OR$ dostiže kada je jedna od tih tačaka središte ivice kojoj pripada.

57. Neka je $\mathcal{P}$ konačan skup tačaka neke ravni, koje nisu sve na istoj pravoj, a $\mathcal{L}$ skup svih pravih od kojih svaka sadrži bar dve tačke skupa $\mathcal{P}$. Ako su $P_0 \in \mathcal{P}$, $l_0 \in \mathcal{L}$, $P_0 \notin l_0$ prava i tačka takve da:

[15] Ovaj problem rešio je znameniti starogrčki filozof i matematičar *Pitagora sa ostrva Samosa*, (*VI* v. pre n. e.). U zadatku se radi o tzv. *pravilnim teselacijama* ravni. Pod *teselacijama* ravni uopšte, podrazumevamo prekrivanje ravni proizvoljnim mnogouglovima. Moguće je npr. prekriti ravan proizvoljnim podudarnim četvorouglovima (*v. zad. 11.111*). Ukoliko dopustimo da u prekrivanju ravni učestvuje više (konačno mnogo) vrsta pravilnih mnogouglova, tada, osim tri pravilne teselacije iz zadatka, postoji još osam tzv. *Arhimedovih teselacija*. Dokaz tog tvrđenja izveo je nemački astronom, matematičar i fizičar *J. Kepler* (1571-1630).

[16] *D. C. L. Lemus* (1780-1863), francuski matematičar, je 1840. g. poslao ovo, na prvi pogled jednostavno, tvrđenje čuvenom švajcarskom geometričaru *J. Štajneru* (1796-1863), koji je izveo dosta složen dokaz istog. Nakon toga, dato je više raznih rešenja ovog problema, jedno od njih objavio je francuski matematičar *A. Poenkare* (1854-1912), 1908 g.

$(\forall P \in \mathcal{P})(\forall l \in \mathcal{L})(P \notin l \Rightarrow d(P,l) \geq d(P_0,l_0))$, gde je sa $d(P,l)$ označeno rastojanje tačke P od prave l, dokazati da prava l_0 sadrži tačno dve tačke skupa $\mathcal{P}$.

58. Neka je $\mathcal{P}$ konačan skup tačaka neke ravni, koje nisu sve na istoj pravoj, dokazati da postoji prava koja sadrži tačno dve tačke skupa $\mathcal{P}$ (*Silvesterov*[17] *problem*).

---

[17] *J. J. Silvester* (1814-1897), engleski matematičar, postavio je ovaj problem 1893. g., koji u to vreme nije rešen i bio je zaboravljen četrdeset godina. Naš matematičar *J. Karamata* (1902-1967) i mađarski matematičar *P. Erdeš* (1913-1996) su ga obnovili 1933. g., a mađarski matematičar *T. Galaj* ga je iste godine rešio. Posle toga, objavljeno je više rešenja istog problema, jedno od njih je sugerisano u 57. zadatku. Godine 1961. veliki kanadski geometričar *H. S. M. Kokseter* (1907) je dokazao to tvrđenje bez korišćenja podudarnosti, kao posledicu samo aksioma incidencije i rasporeda.

Glava IV

Vektori

4.1 Definicija vektora. Sabiranje vektora

Vektore ćemo uvesti pomoću jedne relacije među parovima tačaka, i to na osnovu aksioma *I*, *II*, *IV* i *V* grupe, dakle bez aksioma *III* grupe (aksioma podudarnosti). U odeljku 3.7, geometriju zasnovanu na tim grupama aksioma nazvali smo *afina geometrija*. Pri definisanju pomenute relacije koristi se pojam paralelograma, koji smo, u tom odeljku, već uveli bez aksioma podudarnosti.

Definicija. Parovi tačaka (A,B) i (C,D) su u relaciji $\sim$ ako važi:

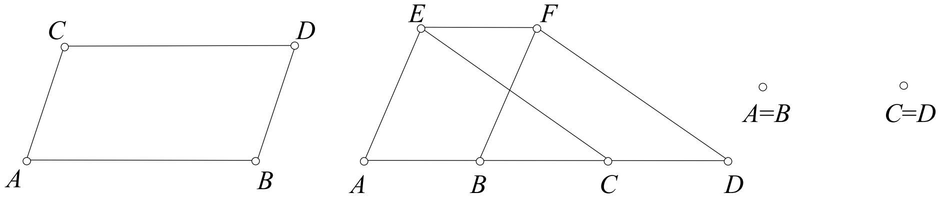
(a) $ABDC$ je paralelogram.

ili

(b) A, B, C, D su kolinearne i $ABFE$ i $CDFE$ su paralelogrami za neke tačke E, F.

ili

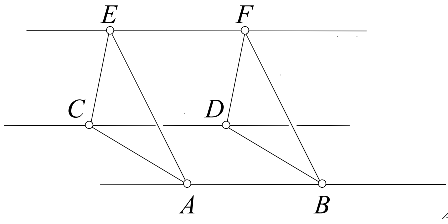
(c) $A=B$ i $C=D$.

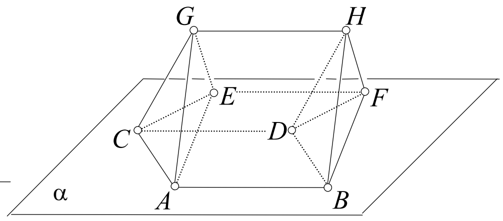


Pre nego što zaključimo da je ovako uvedena relacija ~ relacija ekvivalencije, dokažimo jednu pomoćnu teoremu:

Lema 1. Ako su *ABDC* i *CDFE* paralelogrami i *A*, *B*, *E*, *F* nekolinearne tačke, tada je i četvorougao *ABFE* paralelogram.

Dokaz: Kako važi *AB*||*CD* i *CD*||*EF* to je, zbog tranzitivnosti relacije





paralelnosti pravih, *AB*||*EF*. Treba još dokazati da je *AE*||*BF*. Razlikovaćemo dva slučaja:

1) Neka su *ABDC* i *CDFE* paralelogrami u raznim ravnima. Zbog paralelnosti i različitosti pravih *AC* i *BD* odnosno *CE* i *DF*, važi da su ravni *ACE* i *BDF* disjunktne. Razne paralelne prave *AB* i *EF* obrazuju ravan koja te disjunktne ravni *ACE* i *BDF* seče po paralelnim i različitim pravama *AE* i *BF*.

2) Neka su *ABDC* i *CDFE* paralelogrami neke ravni i neka su *G* i *H* tačke van ravni tako da je četvorougao *ABHG* paralelogram. Onda na osnovu 1) zaključujemo da su paralelogrami redom: *CDHG*, *EFHG* i *ABFE*.❑

Teorema 1.* Relacija ~ je relacija ekvivalencije.

Dakle, skup svih uređenih parova tačaka prostora razbijen je na klase ekvivalencije.

Definicija. Svaku od klasa ekvivalencije na koje je skup uređenih parova, tačaka prostora, razbijen pomoću relacije ~ nazivamo *vektor*.

Dakle, skup svih parova tačaka koje su u relaciji ~ sa parom (*A*,*B*) čini jednu klasu ekvivalencije tj. jedan vektor, označavaćemo ga sa $\overrightarrow{AB}$. To možemo zapisati i na sledeći način:

$$\overrightarrow{AB} = \{(X,Y);(X,Y) \sim (A,B)\}$$

Vektore ćemo označavati malim latiničnim slovima npr. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ldots$ ako nije potrebno istaći o kom se predstavniku klase radi.

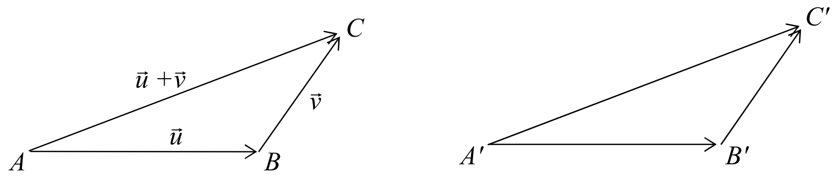
Skup svih klasa ekvivalencije, tj. skup svih vektora označavaćemo sa $\vec{A}$.

Ako je $\overrightarrow{AB}$ neki vektor i $A \neq B$ onda je *pravac* tog vektora prava AB ili bilo koja njoj paralelna prava. *Smer* tog vektora je od A ka B. Ako je $A=B$, vektor $\overrightarrow{AA}$ nazivamo *nula vektor* i označavamo $\vec{0}$. Vektori istog pravca zovu se *kolinearni* vektori. Posebno, vektor $\overrightarrow{BA}$ je *suprotan vektor* vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ i označava se sa $-\vec{v}$. Vektori čiji su pravci paralelni istoj ravni zovu se *komplanarni* vektori.

Teorema 2. Za svaku tačku A i svaki vektor $\vec{v}$, postoji jedinstvena tačka B takva da je $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Dokaz: Najpre ako je $\vec{v}$ nula vektor tada je $B=A$ tražena tačka. Razmotrimo slučaj kada $\vec{v}$ nije nula vektor. Neka je (C,D) proizvoljan predstavnik klase $\vec{v}$ tj. neka je $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Ako tačka A ne pripada pravoj CD tada je tražena tačka B teme paralelograma $CDBA$. Ako $A \in CD$ tada možemo iskoristiti pomoćni paralelogram $CDFE$, pa je tačka B teme paralelograma $EFBA$. Na osnovu definicije relacije ~, u oba slučaja je $(A,B) \sim (C,D)$. Tada je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Jedinstvenost sledi iz jedinstvenosti četvrtog temena paralelograma. ❑

Definicija. Neka je A proizvoljna tačka i $\vec{u}$, $\vec{v}$ proizvoljni vektori. *Zbir* vektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ je vektor $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{CD}$.



Definicija je korektna ako vektor ne zavisi od izbora tačke A, a to je tvrđenje sledeće teoreme:

Teorema 3. Ako su A, B, C, A', B', C' tačke, takve da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ tada je i $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Dakle, tvrdimo da vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AC'}$ predstavljaju istu klasu koju smo već nazvali zbirom vektora. Dokaz izostavljamo, a izvodi se razlikovanjem slučajeva u kojima se između ostalog koristi i lema 1.

Na osnovu prethodne dve teoreme možemo zaključiti:

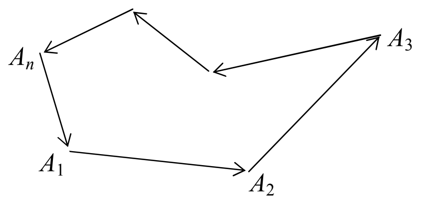
- $(\forall A,B,C)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, tzv. *pravilo trougla* za sabiranje vektora (tačke A, B, C ne moraju biti kolinearne).
- $(\forall A)(\forall \vec{v} \in \vec{A})(\exists_1 B)\ \overrightarrow{AB}=\vec{v}$, tzv. *pravilo nadovezivanja*.

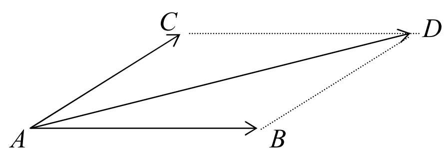
Pokazuje se da skup svih vektora u odnosu na operaciju sabiranja vektora čini strukturu tzv. *komutativne grupe* ili *Abelove*[18] *grupe* (u odeljku 3.1, spomenut je pojam grupe; grupa je komutativna ako je zadovoljena i komutativnost). Svojstva te strukture date su u iskazu sledeće teoreme:

Teorema 4.* (i) Zbir dva vektora je vektor.
(ii) Za sabiranje vektora važi asocijativni zakon.
(iii) Postoji vektor $\vec{e}$, tako da za svaki vektor $\vec{v}$ važi: $\vec{v}+\vec{e}=\vec{v}$.
(iv) Za svaki vektor $\vec{v}$ postoji vektor $\vec{u}$, takav da je: $\vec{v}+\vec{u}=\vec{e}$.
(v) Za svaka dva vektora $\vec{v}$ i $\vec{u}$ je: $\vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v}$ (*komutativnost*).

Ovde, kao posledicu (ii), možemo navesti tzv. *pravilo poligona* za sabiranje više vektora:

- $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$.





Takođe, kao posledicu (v), možemo navesti i tzv. *pravilo paralelograma* za sabiranje dva vektora:

- Ako su A,B,C nekolinearne tačke tada je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$; gde je $ABDC$ paralelogram.

Posebno istaknimo sledeće tvrđenje:

[18] *N. H. Abel* (1802-1829), norveški matematičar.

Teorema 5. Ako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, tada je i $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Dokaz: Zaista na osnovu teoreme 2 i teoreme 4 sledi:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}.\ \square$$

Primetimo da to tvrđenje važi nezavisno od toga da li je $ABCD$ paralelogram ili ne.

Definicija. (*Množenje vektora celim brojem.*) Neka je $\overrightarrow{AB}$ vektor i n prirodan broj. Tada:

(i) $0\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$;

(ii) $n\cdot\overrightarrow{AB}=(n-1)\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$;

(iii) $(-n)\cdot\overrightarrow{AB}=-(n\cdot\overrightarrow{AB})$.

Dokaz naredne teoreme je neposredan i prepuštamo ga čitaocu.

Teorema 6. Ako je $\overrightarrow{AB}$ proizvoljan vektor i m, n celi brojevi, tada je:

(i) $1\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$;

(ii) $(m+n)\cdot\overrightarrow{AB}=m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AB}$;

(iii) $(mn)\cdot\overrightarrow{AB}=m(n\cdot\overrightarrow{AB})$.

Zadaci

1. Dokazati:

   (i) Za bilo koje tri tačke je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

   (ii) Zbir *zatvorenog sistema nadovezanih vektora*:
   $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}$ je nula vektor.

2. Odrediti neke vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ čiji je zbir jednak:

   (i) jednom od njih; (ii) razlici neka dva.

3. Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke prostora. Da li važi:

   (i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$?

   (ii) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\cdot\overrightarrow{BC}$?

4. Neka je $ABCDE$ petougao neke ravni. Dokazati da u toj ravni postoji petougao, čije ivice određuju vektore, jednake redom vektorima određenim dijagonalama petougla $ABCDE$.

5. Neka je $ABCD$ četvorougao i O proizvoljna tačka prostora. U funkciji vektora $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ izraziti vektore ivica i dijagonala datog četvorougla.

6. Neka je O proizvoljna tačka i $ABCD$ neki četvorougao. Da li važi ekvivalencija: $ABCD$ je paralelogram akko je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$?

7. Neka je $ABCD$ paralelogram i M proizvoljna tačka prostora. Ako je O presečna tačka dijagonala tog četvorougla, dokazati da je:
$$4\cdot\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$$

8. Ako su nad ivicama trougla ABC konstruisani paralelogrami ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2, dokazati da važi:
$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\vec{0}.$$

Da li rezultat važi bez obzira da li su konstruisani paralelogrami:

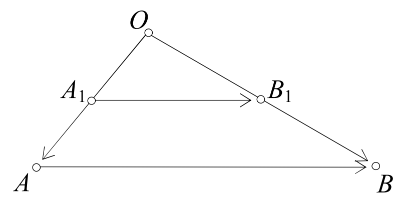
(i) U ili van ravni trougla?

(ii) U oblasti ili van oblasti trougla?

9. Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke. Da li se duži određene tim tačkama mogu orijentisati tako da zbir dobijenih vektora bude nula vektor? Pod kojim uslovima se projekcije tih duži na proizvoljnu ravan mogu orijentisati tako da zbir dobijenih vektora bude nula vektor?

4.2 n-ti deo vektora. Množenje vektora racionalnim skalarom

Sada ćemo proširiti operaciju množenja vektora celim brojem do operacije množenja vektora racionalnim brojem. I u ovom odeljku sva tvrđenja mogu se dokazati bez korišćenja aksioma podudarnosti. Tako se npr. naredna teorema može dokazati u afinoj geometriji.* U euklidskoj geometriji, u jednom od slučajeva, ona je direktna posledica teoreme o srednjoj liniji iz odeljka 3.7.

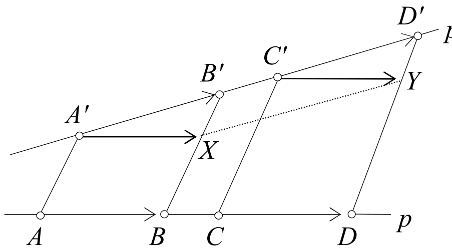


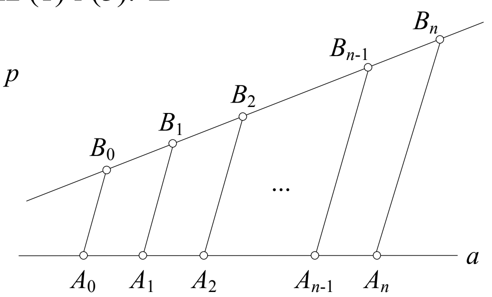
Teorema 1.* (i) Ako je $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1A}$ i $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{B_1B}$ tada je $\overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}$.
(ii) Ako je $\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1A}$, $A_1 \neq O$ i ako su B_1 i B tačke neke prave koja sadrži tačku O i različita je od prave OA_1 onda važi:
$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{B_1B} \Leftrightarrow A_1B_1 \parallel AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\cdot\overrightarrow{A_1B_1}.$$

Sada ćemo dokazati da se tzv. *paralelnim projektovanjem* jednaki vektori projektuju u jednake vektore.

Teorema 2. (i) Neka su A, B, C, D tačke neke prave p i A', B', C', D' tačke preseka paralelnih pravih, koje sadrže tačke A, B, C, D, i neke prave p'. Ako je $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ tada je $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$.

Dokaz: (i) Neka su X i Y tačke takve da je $\overrightarrow{A'X}=\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{C'Y}=\overrightarrow{CD}$. Dakle važi $\overrightarrow{A'X}=\overrightarrow{C'Y}$ odnosno, zbog teoreme 5. iz prethodnog odeljka, važi $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{XY}$ (1). Takođe je i $\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{BX}$ i $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DY}$. Ako su tačke X i Y različite, one se, dakle, nalaze na različitim paralelnim pravama kroz B odnosno D, koje pravu p' seku u tačkama B' i D'; s druge strane iz (1) zaključujemo da su prave XY i $A'C'=B'D'=p'$ paralelne. Dakle, $XYD'B'$ je paralelogram, tj. važi $\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{XY}$. Tada je $A'C'=B'D'$ (jer su oba vektora jednaka sa $\overrightarrow{XY}$), pa je, opet na osnovu pomenute teoreme, $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{C'D'}$, što je trebalo dokazati.
Ako je $X=Y$ tada zbog (1), na osnovu definicije vektora zaključujemo, da je $A'=C'$ (2). Odatle sledi $A=C$ odnosno $B=D$ (iz $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$), odnosno $B'=D'$ (3). Traženi zaključak sledi iz (1) i (3). ❑

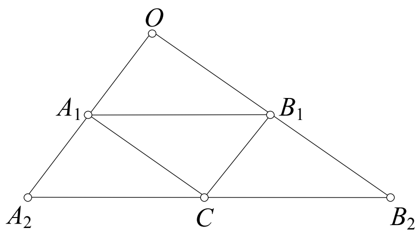


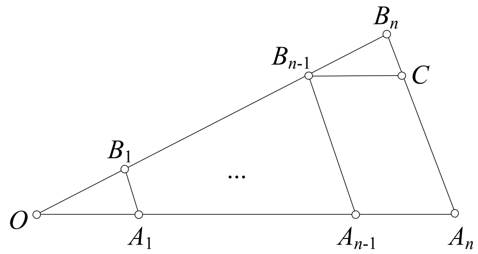


Teorema 3. Neka paralelne prave $c_0, c_1,...,c_n$ seku prave a i b u tačkama $A_0, A_1,...,A_n$ i $B_0, B_1,...,B_n$ redom. Ako je $\overrightarrow{A_0A_1}=\overrightarrow{A_1A_2}=+\cdots=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ tada je $\overrightarrow{B_0B_1}=\overrightarrow{B_1B_2}=+\cdots=\overrightarrow{B_{n-1}B_n}$.

Ako je, uz prethodno, i $A_0=B_0=O$ tada važi $\overrightarrow{A_nB_n} = n\cdot \overrightarrow{A_1B_1}$.

Prvi deo je jednostavno uopštenje prethodne teoreme. Drugi deo bismo dokazivali pomoću principa matematičke indukcije. Za n=2 tvrđenje važi





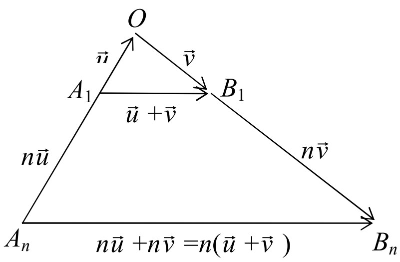
na osnovu teoreme 1(i). Dalji deo dokaza izostavljamo.

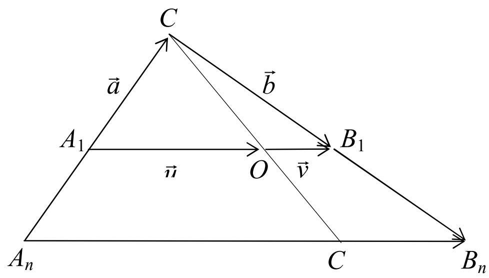
Teorema 4. Neka razne komplanarne prave $c_0, c_1,\ldots,c_n$ seku prave a i b u tačkama $A_0, A_1,\ldots,A_n$ i $B_0, B_1,\ldots,B_n$ redom. Ako je $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{A_1A_2} = +\cdots = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ i $\overrightarrow{B_0B_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = +\cdots = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$ i ako je $c_1\|c_0$ tada je c_1 paralelna sa svim pravama $c_2,\ldots,c_n$. Posebno ako je $A_0=B_0=O$ onda se iz formulacije može izbaciti prava c_0 i uslov $c_1\|c_0$.

Napomenimo da se dokaz teoreme 4 svodi na teoremu 3.

Teorema 5.* Za vektore $\vec{u} = \overrightarrow{A_1O}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{OB_1}$ i proizvoljan prirodan broj n važi:

$$n(\vec{u}+\vec{v})=n\vec{u}+n\vec{v}.$$





Konačno, možemo definisati i vektor $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ kao n-ti deo vektora i vektor $\frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$ ($m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$ tj. $\frac{m}{n}\in \boldsymbol{Q}$), s tim što je naredna teorema 6, neophodna za obrazloženje korektnosti takve definicije.

Definicija. (*i*) Vektor $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ ($n\in \boldsymbol{N}$) je vektor $\overrightarrow{CD}$ takav da je $n\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

(*ii*) Vektor $\frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$ ($m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$) je jednak vektoru $m_1\left(\frac{1}{n_1}\overrightarrow{AB}\right)$;

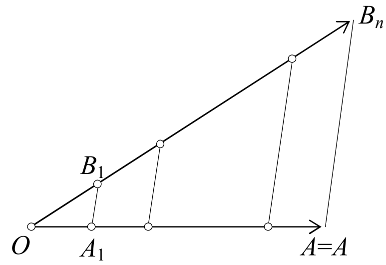
pri čemu je $\frac{m_1}{n_1}$ redukovan razlomak.

Vektor $\frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ zovemo *n-ti deo vektora AB*. Vektor $\frac{m}{n}\overrightarrow{AB}$ je *proizvod vektora AB* racionalnim brojem, češće kažemo *racionalnim skalarom* $\frac{m}{n}$. Lako se dokazuje da je n-ti deo nula vektora nula vektor, pa je na osnovu toga i proizvod nula vektora racionalnim skalarom takođe nula vektor.

Posebno $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ je *polovina* vektora $\overrightarrow{AB}$. Ako je $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ i $A\neq B$ tada je, u euklidskoj geometriji, tačka C središte duži AB. Sada je jasno, da se pojam središta duži može uvesti i u afinoj geometriji, bez aksioma podudarnosti.

- Često vezu $=\overrightarrow{AB} = k\cdot\overrightarrow{CD},\ k\in \boldsymbol{Q}$ zapisujemo u obliku $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = k$ ili $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD} = k$.

Teorema 6. n-ti deo vektora je jednoznačno određeni vektor.



Dokaz: Odredimo n-ti deo vektora $\overrightarrow{OA}$; $O\neq A$. Označimo $A=A_n$ i označimo sa b neku pravu koja sadrži tačku O a ne sadrži tačku A_n. Neka su B_1, B_2, ...,B_n tačke na pravoj b takve da je:

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{B_1B_2} = + \cdots = \overrightarrow{B_{n-1}B_n}\ .$$

Sa A_1 označimo presečnu tačku prave OA_n sa pravom kroz tačku B_1, koja je paralelna sa A_nB_n. Prema prethodnoj teoremi i definiciji je OA_1 n-ti deo vektora OA_n tj. OA. Dokažimo jedinstvenost. Ako bi važilo i $n\overrightarrow{OA_1}' = \overrightarrow{OA_n}$ za neku tačku A'_1, tada bi zbog prethodne teoreme važilo $A'_1B_1\|A_nB_n$, pa po Plejferovoj aksiomi sledi $A_1=A'_1$.❑

Rezultate teoreme 6, iz prethodnog odeljka, i teoreme 5, ovog odeljka, proširujemo na proizvod vektora racionalnim skalarom:

Teorema 7. Ako su p, q racionalni brojevi i $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ proizvoljni vektori, tada važi:

(i) $(p+q)\overrightarrow{AB} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AB}$;
(ii) $(pq)\overrightarrow{AB} = p(q\overrightarrow{AB})$;
(iii) $1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;
(iv) $p(\vec{u}+\vec{v})=p\vec{u}+p\vec{v}$.

Dokaz je neposredan (primena množenja vektora i n-tog dela vektora...). ❑

Ako uzmemo u obzir da pored rezultata prethodne teoreme (i)-(iv), važi i da skup svih vektora čini komutativnu grupu u odnosu na sabiranje vektora, onda po definiciji kažemo da taj skup čini tzv. *vektorski prostor nad poljem* ***Q***.

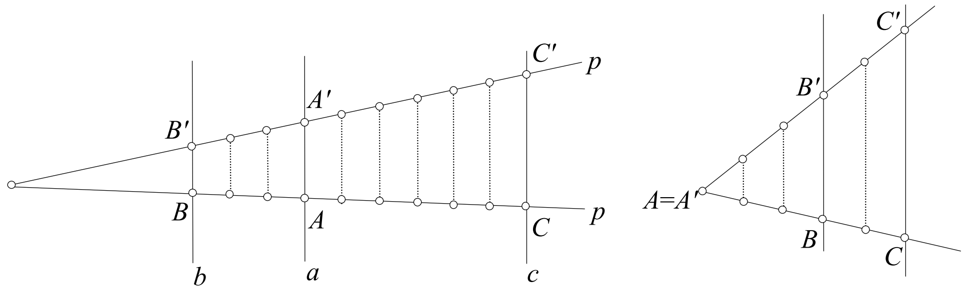
Teorema 8. *(Talesova*[19] *teorema - specijalni slučaj)*
(i) Ako razne komplanarne prave c, b i $a\|b$ seku razne prave p i p' u tačkama C, B, A i C', B', A' redom i ako za neko $k\in\mathbf{Q}$ važi $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AC}=k$, tada važi ekvivalencija:

$$b\|c \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{A'C'} = k$$

[19] Starogrčki filozof i matematičar *Tales iz Mileta* (*VII-VI* v. pre n. e.).

(ii) Ako je A=A' tada iz bilo kojeg od ekvivalentnih iskaza $b\|c$ ili $\overrightarrow{A'B'}:\overrightarrow{A'C'}=k$ sledi $\overrightarrow{BB'}:\overrightarrow{CC'}=k$.

Dokaz: Neka je $k=\dfrac{m}{n}$ redukovan razlomak; $m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{N}$, i neka su: A_1, $A_2,\ldots,A_{|m|-1}$, odnosno $C_1,C_2,\ldots,C_{n-1}$ takve da važi $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{A_1A_2}=+\cdots=\overrightarrow{A_{|m|-1}B}$ i $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{C_1C_2}=+\cdots=\overrightarrow{C_{n-1}C_n}$ (tj. podelili smo vektore AB i AC na $|m|$ odnosno n delova). Tvrđenje sada sledi na osnovu teoreme 2 (ii). ❑



Zadaci

1. Neka je ABC trougao i A_1, B_1, C_1 središta ivica BC, CA, AB. Dokazati:
   (i) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$;
   (ii) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}$, ako je M proizvoljna tačka;
   (iii) Postoji trougao PQR takav da za tačke P, Q, R važi:
   $$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CC_1},\ \overrightarrow{PR}=\overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{AA_1}.$$
2. Ako su M i N središta duži AC i BD dokazati da je: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.
3. U svakom četvorouglu duži određene središtima naspramnih ivica i duž određena središtima dijagonala seku se u jednoj tački koja je središte sve tri duži. Da li rezultat važi i ako je četvorougao:
   (i) prostorni ? (ii) nije prost ?
4. Ako su M, N, P, Q, R, S središta ivica redom, proizvoljnog šestougla, dokazati da je $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$.

5. Neka su K i L tačke ivice AD i dijagonale AC paralelograma $ABCD$, takve da je $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KD}=\frac{1}{3}$ i $\overrightarrow{AL}:\overrightarrow{LC}=\frac{1}{4}$. Dokazati da su tačke K, L, B kolinearne.

6. Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke. Ako je E središte duži AB i F i G takve da važi $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AD}$, dokazati da su tačke G, S, F kolinearne pri čemu je tačka S središte duži CD.

7. Tačke M, N, P, Q su središta ivica AB, BC, CD, DE petougla $ABCDE$. Dokazati da je duž XY koja je određena središtima duži MP i NQ paralelna sa pravom AE i odrediti: $\overrightarrow{XY}:\overrightarrow{AE}$.

8. Tačka T je *težište figure* $\{A_i \mid i\in I\}$ ako važi : $\sum_{i\in I}\overrightarrow{TA_i}=\vec{0}$. Ako se figura sastoji od konačnog broja tačaka A_1, A_2,...,A_n, dokazati da važi:

(*i*) težište je jedinstveno;

(*ii*) ako je T težište i O proizvoljna tačka prostora tada je:

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}\right).$$

9. Ako su T i T' težišta n-torki $(A_1,A_2,...,A_n)$ i $(A'_1,A'_2,...,A'_n)$, izračunati:

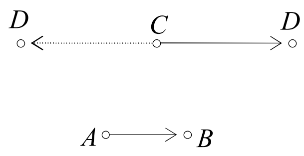
$$\overrightarrow{A_1A_1'}+\overrightarrow{A_2A_2'}+\cdots+\overrightarrow{A_nA_n'}.$$

10. Četvorke (A,B,C,D) i (A',B',C',D') imaju zajedničko težište akko je $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$. Dokazati.

4.3 Proizvod vektora realnim skalarom

Uveli smo vektore i operacije sabiranja vektora i množenja vektora racionalnim skalarom. Sada ćemo to proširiti na množenje vektora realnim skalarom.

Koristeći aksiomu neprekidnosti, može se uvesti mera vektora istog pravca (a samim tim i mera duži, za duži istog pravca), na osnovu čega uvodimo operaciju množenja vektora realnim skalarom.



Definicija. Za svaku duž AB ($A \neq B$), svaki realan broj $\lambda > 0$, i svaku tačku C neke prave p, koja je paralelna sa AB, postoje tačno dve tačke D_1 i D_2 te prave, za koje važi $|\overrightarrow{CD_1}| = |\overrightarrow{CD_2}| = \lambda|\overrightarrow{AB}|$ gde su $|\overrightarrow{CD_1}|$, $|\overrightarrow{CD_2}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ oznake za *mere* odgovarajućih vektora odnosno duži. $\lambda\overrightarrow{AB}$ biće onaj od vektora $\overrightarrow{CD_1}$ i $\overrightarrow{CD_2}$ koji je istog smera kao $\overrightarrow{AB}$, a $-\lambda\overrightarrow{AB}$ je onaj preostali.

Kao i u slučaju množenja vektora racionalnim skalarom, vezu $CD = \lambda AB$ zapiasivaćemo i u obliku $\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda$ odnosno $\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{AB} = \lambda$.

Sledeću teoremu dajemo bez dokaza:

Teorema 1. Skup svih vektora čini vektorski prostor nad poljem ***R***.

Svojstva (*i*), (*ii*), (*iii*) (v. teoremu 7, iz odeljka 4.2) slede iz svojstava merenja duži na paralelnim pravcima, a (*iv*) tj. Talesova teorema u polju ***R*** se izvodi iz Talesove teoreme u polju ***Q*** (teorema 8, iz odeljka 4.2) i aksiome neprekidnosti. Napominjemo da dokaz nije složen, ali zahteva znanje o graničnim vrednostima.

Teorema 2. (*Talesova teorema - direktna i obratna)*

(*i*) Ako razne komplanarne prave c, b i $a \| b$ seku razne prave p i p' u tačkama

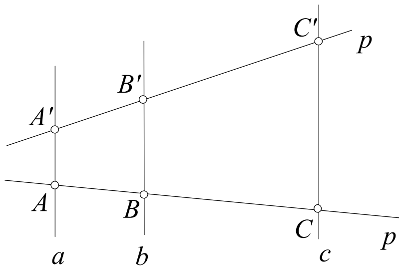
C, B, A i C', B', A' tada važi ekvivalencija:

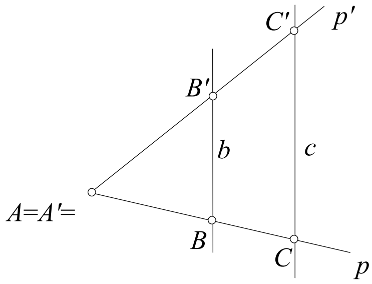
$$b \| c \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$$

(*ii*) Ako je, uz prethodno, i $A = A' = O$ tada:

$$b \| c \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OC'}},$$

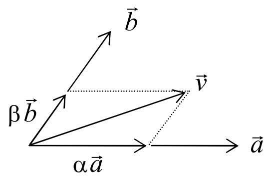
a iz oba ekvivalentna uslova sledi: $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OC}} = \dfrac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{CC'}}$.



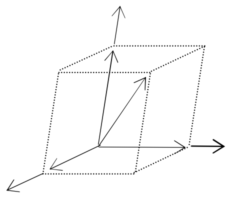


Neposredno se dokazuju sledeća svojstva u kojima se algebarski karakterišu ranije definisani pojmovi (ne)kolinearnosti i (ne)komplanarnosti vektora:

- Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su kolinearni akko se bar jedan od njih može prikazati pomoću drugog. Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su nekolinearni akko se nijedan od njih ne može prikazati pomoću drugog.
- Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su nekolinearni (kolinearni) akko jednačina $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$ po $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ ima (nema) tačno jedno (tzv. *trivijalno*) rešenje $\alpha=\beta=0$.
- Ako je vektor $\vec{v}$ komplanaran sa nekolinearnim vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tada se $\vec{v}$ može na jedinstven način izraziti: $\vec{v}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



- Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su komplanarni akko se bar jedan od njih može izraziti preko ostala dva. Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su nekomplanarni akko se nijedan od njih ne može izraziti preko ostala dva.
- Vektori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ su nekomplanarni (komplanarni) akko jednačina $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ po α, β, $\gamma \in \boldsymbol{R}$ ima (nema) samo jedno rešenje $\alpha=\beta=\gamma=0$.



- Svaki vektor $\vec{v}$ može se na jedinstven način prikazati pomoću tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{v}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Napomena: Za kolinearne, odnosno komplanarne vektore, kasnije ćemo koristiti opštiji naziv: *linearno zavisni vektori* u prostoru, a dva nekolinearna odnosno tri nekomplanarna vektora nazivaćemo *linearno nezavisni vektori*.

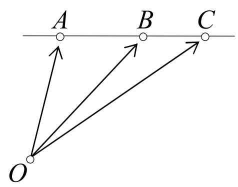
Definicija. Ako je $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=\alpha$ ($\alpha\in\boldsymbol{R}$ i $\alpha\neq-1$), kaže se da tačka C *razlaže* ili *deli* duž AB u odnosu α.

Primer. Neka su O, A, B, C proizvoljne tačke. Tada važi:

(i) A, B, C su kolinearne akko $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$, za neko $\lambda\in\boldsymbol{R}$;

(ii) Ako tačka C razlaže duž AB u odnosu $\alpha\in\boldsymbol{R}$ ($\alpha\neq-1$), tada je:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{OA}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{OB}.$$



Rešenje: (i) $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\lambda\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$.

(ii) Ekvivalentno transformišimo dobijenu vezu $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BC}=\lambda(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\ \Leftrightarrow\ \lambda\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}=-\lambda\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow\ (\lambda-1)\overrightarrow{CB}=-\lambda\overrightarrow{AC}\ \Leftrightarrow\ \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Po definiciji je $\overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}=\alpha$. Iz $\frac{1-\lambda}{\lambda}=\alpha$ sledi $\lambda=\frac{1}{\alpha+1}$ i $\alpha\neq-1$ tj.

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{\alpha+1}\overrightarrow{OA}+\frac{\alpha}{\alpha+1}\overrightarrow{OB}\ (\alpha\neq-1).$$

Zadaci

1. Ako je $ABCD$ četvorougao čije su ivice AB i CD paralelne, dokazati $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$, gde su M i N središta ivica AD i BC. (Stav o srednjoj liniji trapeza.)

2. Neka su M, N, P, Q središta ivica AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$. Da li važi da je $ABCD$ paralelogram akko je:

(i) $2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ i $2\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$?

(ii) $2\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$?

3. Neka su E, F, G središta ivica AB, BC, CD paralelograma $ABCD$ i neka prave BG i DE seku AF u tačkama N i M. Izraziti AF, AM, AN u funkciji vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. Dokazati zatim da tačke M i N razlažu duž AF u odnosu 2:2:1.

4. Dokazati da se težišne duži AA_1, BB_1, CC_1 trougla ABC ravni seku u jednoj tački T za koju važi:
   (i) $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TA_1}$, $\overrightarrow{BT} = 2\overrightarrow{TB_1}$, $\overrightarrow{CT} = 2\overrightarrow{TC_1}$;
   (ii) $\overrightarrow{XT} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, za proizvoljnu tačku X.

5. Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke. Ako su A_T, B_T, C_T, D_T težišta trouglova BCD, ACD, ABD, ABC dokazati da se duži AA_T, BB_T, CC_T, DD_T seku u jednoj tački T. U kom odnosu ta tačka razlaže te duži?

6. Neka su P, Q, R, S težišta trouglova ABD, BCA, CDB, DAC. Dokazati da se poklapaju težišta četvorki tačaka (P,Q,R,S) i (A,B,C,D).

7. Ako su A, B, C težišta trouglova OMN, ONP, OMP dokazati da su težište trougla MNP, težište trougla ABC i tačka O - tri kolinearne tačke.

8. Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ šestougao i B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 težišta trouglova čija su temena tri uzastopna temena šestougla $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. (Smatra se da iza A_6 sledi A_1.) Dokazati da ta težišta određuju šestougao sa tri para paralelnih ivica. Da li tvrđenje važi ako šestougao:
   (i) nije komplanaran; (ii) nije prost?

9. Neka su O, A, B, C, D proizvoljne tačke. Dokazati ekvivalenciju: A, B, C, D su komplanarne akko $\overrightarrow{OD} = (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + \mu\overrightarrow{OC}$ za neke $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.

10. Neka je CC_1 težišna duž trougla ABC i P proizvoljna tačka na ivici AB tog trougla. Ako je l prava koja sadrži tačku P, paralelna je sa CC_1 i seče prave AC i BC u tačkama M i N, dokazati da je: $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

11. Neka je O tačka u ravni trougla ABC i D, E tačke ivica AB odnosno BC takve da je $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \dfrac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = \dfrac{m}{n}$. Ako je F presečna tačka duži AE i CD, izraziti OF u funkciji $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, m, n.
12. Neka su K, L, M, N tačke koje pripadaju ivicama AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$. Ako važi: $\overrightarrow{AK} : \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{BL} : \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{CM} : \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DN} : \overrightarrow{NA} = \lambda$ ($\lambda \neq \pm 1$) i ako je četvorougao $KLMN$ paralelogram, onda je i četvorougao $ABCD$ paralelogram. Dokazati.
13. Odrediti skup središta duži PQ ako su P i Q proizvoljne tačke datih mimoilaznih pravih p i q.

4.4 Vektori u euklidskoj geometriji

Uveli smo merenje vektora odnosno duži na međusobno paralelnim pravcima. Ako uključimo i preostale aksiome *III* grupe, prelazimo na euklidsku geometriju. Duži se onda, kao što smo videli u prethodnoj glavi, porede bez obzira na pravac, upoređuju se uglovi, definiše se normalnost. U tom slučaju lako se dokazuje:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB \cong CD$.

To tvrđenje je posledica teoreme o paralelogramu, iz odeljka 3.8.

Kao primer primene vektora u euklidskoj geometriji navodimo sledeću teoremu:

Teorema. Neka su O i H centar opisanog kruga i ortocentar trougla ABC i A_1, B_1, C_1 središta njegovih ivica BC, CA, AB. Važi:

(i) $2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AH}$

(ii) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ *(Hamiltonova[20] teorema)*

(iii) $2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$.

Dokaz: (i) Vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{AH}$ su kolinearni, pa je $\overrightarrow{OA_1} = \alpha\overrightarrow{AH}$ i analogno $\overrightarrow{OB_1} = \beta\overrightarrow{BH}$ za neke $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$, koje treba odrediti. Kako je:

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$$

i s druge strane $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1O} + \overrightarrow{OA_1} = \beta\overrightarrow{HB} + \alpha\overrightarrow{AH}$, zaključujemo da je

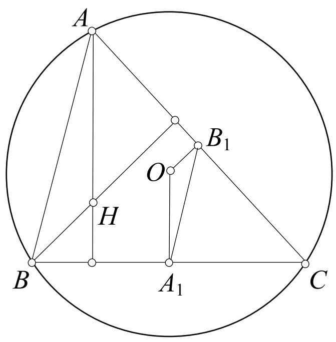
$$\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\overrightarrow{HB} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\overrightarrow{AH} = \vec{0}.$$

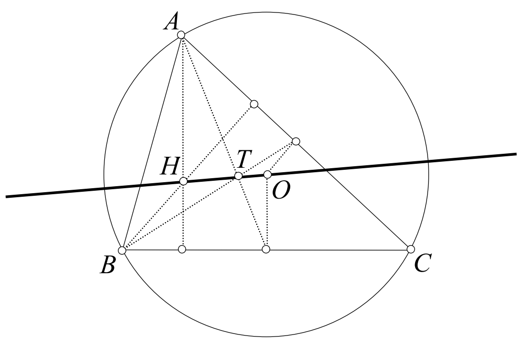
Zbog linearne nezavisnosti vektora $\overrightarrow{HB}$ i $\overrightarrow{AH}$ sledi $\beta=\frac{1}{2}=\alpha$ tj. $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA_1}$.

(ii) $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}$.

(iii)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} &= 2\overrightarrow{OA_1} + 2\overrightarrow{OB_1} + 2\overrightarrow{OC_1}\\ &= 2((\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_1}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB_1}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_1}))\\ &= 2(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})\\ &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\end{aligned}$$

❑





[20] *V.R. Hamilton* (1805-1865), irski matematičar.

Primer. Dokazati da su centar opisanog kruga O, težište T i ortocentar H trougla ABC kolinearne tačke i da važi HT=2TO. (Prava koja sadrži te tri tačke zove se *Ojlerova prava*[21].)

Rešenje: Sa A_1 označimo središte ivice BC. Kako je AT:TA_1=2:1 na osnovu primera iz prethodnog odeljka važi: $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

Dakle: $\overrightarrow{OT}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

Ali na osnovu Hamiltonove teoreme je $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Tada je $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OT}$, na osnovu čega sledi tvrđenje.

Zadaci

1. Neka je tačka M središte ivice DE pravilnog šestougla $ABCDEF$. Ako je N središte duži AM i P središte ivice BC, izraziti $\overrightarrow{NP}$ u funkciji $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AF}$.

2. Dve normalne prave p i q koje se seku u tački M, seku dati krug sa centrom O u tačkama A, B, C, D. Dokazati da je: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$.

3. Odrediti ugao između vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ako tačke A, B, C pripadaju krugu sa centrom u tački O i ako važi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

4. Neka je O centar pravilnog n-tougla $A_1A_2...A_n$. Dokazati:
   (*i*) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$,
   (*ii*) $n\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\overrightarrow{MA_n}$, ako je M proizvoljna tačka euklidskog prostora.

5. Neka je $ABCDEF$ konveksni šestougao kod koga je $AB\|DE$. Ako su K i L središta duži određenih središtima preostalih parova naspramnih ivica, dokazati da je K=L ako i samo ako je $AB\cong DE$.

---

[21] Svojstvo koje je 1765. g. dokazao švajcarski matematičar *L. Ojler* (1707-1783).

6. Neka su $A_1,A_2,...,A_n$ tačke prave p i $B_1,B_2,...B_n$ tačke prave q takve da važi: $\overrightarrow{A_1A_2} : \overrightarrow{A_2A_3} : \cdots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{B_1B_2} : \overrightarrow{B_2B_3} : \cdots \overrightarrow{B_{n-1}B_n}$ ($n\geq 3$). Dokazati da središta duži A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n pripadaju jednoj pravoj.
7. Dokazati da za proizvoljne tačke A, B, C važi:
(*i*) $|\overrightarrow{AC}| \leq |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; (*ii*) $|\overrightarrow{AC}| \geq |\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$.
Pod kojim uslovima važi "=" u (*i*) ?
8. Dokazati da za proizvoljne vektore $\vec{u}$ i $\vec{v}$ važi: $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$.
9. Neka su A, B, C, D proizvoljne tačke u prostoru i M i N tačke na dužima AD odnosno BC takve da je $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NB}} = 1$. Dokazati da je tada duž MN manja ili jednaka većoj od duži AB i CD.
10. Neka je ABC trougao i Q, K, L, M, N, P tačke polupravih AB, AC, BC, BA, CA, CB takve da je $AQ\cong CP\cong AC$; $AK\cong BL\cong AB$; $BM\cong CN\cong BC$. Dokazati da su prave MN, PQ, LK paralelne.
11. Neka je P središte težišne duži AA_1 trougla ABC. Ako je Q presečna tačka ivice AC sa pravom BP odrediti AQ:QC i BP:PQ.
12. Neka su X_n i Y_n ($n\in \boldsymbol{N}$) tačke ivica AB i AC trougla ABC takve da je $\overrightarrow{AX_n} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AY_n} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AC}$. Dokazati da postoji tačka koja pripada svim pravama X_nY_n.
13. Neka su P i Q tačke ivica BC i CD paralelograma $ABCD$, takve da je BP:PC=2:3 i CQ:QD=2:5. Ako je X presečna tačka duži AP i BQ odrediti odnose u kojima ona razlaže te duži.
14. Ako su P i Q tačke ivica AB i AC trougla ABC, takve da je $\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AP}|} + \frac{|\overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{AQ}|} = 1$, dokazati da težište tog trougla pripada duži PQ.
15. Odrediti težište proizvoljnog četvorougla.
16. Neka su A, B, C tačke ravni α sa iste strane prave p. Ako za neku tačku O prave p važi da je $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$, tada je $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| \geq 1$.

17. Ako su $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ komplanarni vektori takvi da je $|\vec{u}|=|\vec{v}|=|\vec{w}|=x$, ispitati u kom slučaju je $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|=x$.

18. Ako su A, B, C, D tačke kruga sa centrom O, takve da je $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, dokazati da je četvorougao $ABCD$ pravougaonik.

19. Neka su H i O ortocentar i centar opisanog kruga trougla ABC. Ako je $AH \cong AO$, dokazati da je $\angle BAC=60^{\circ}$.

20. Ako je E presečna tačka bisektrise unutrašnjeg ugla trougla ABC kod temena A sa njegovom ivicom BC, dokazati da je:

$$\overrightarrow{AE}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AB}+\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}.$$

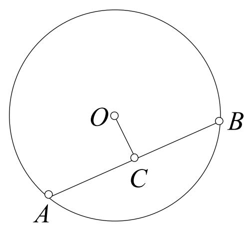
Glava V

Daljnja primena podudarnosti

5.1 Primena podudarnosti na krug

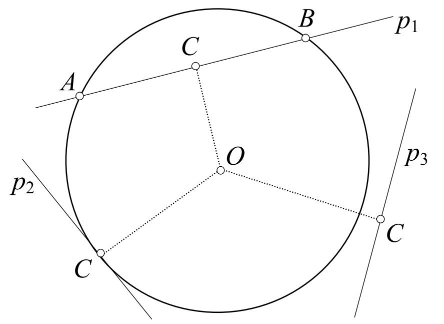
Krug sa centrom O i poluprečnikom AB, gde je AB duž, smo definisali kao skup svih tačaka X neke ravni, koja sadrži tačku O, takvih da je $(O,X)\cong(A,B)$. Označavali smo ga sa $k(O,AB)$. Na osnovu teoreme 1, iz odeljka 3.3, umesto pomenute relacije možemo pisati i $OX\cong AB$. Rećićemo nekad i da je krug sa centrom O skup svih tačaka neke ravni koje su na istom *odstojanju* od tačke O. Pri tome pod odstojanjem tačke X od tačke O podrazumevamo pozitivan realan broj koji je *dužina* ili *mera* duži OX (o meri duži biće više reči u osmoj glavi). Sada za krug možemo koristiti i oznaku $k(O,r)$, gde r može predstavljati duž ili meru te duži. Tačaka X u ravni kruga $k(O,r)$, za koju je $OX<r$, naziva se *unutrašnja tačka kruga*. Skup svih unutrašnjih tačaka kruga je *unutrašnja oblast kruga*. Unija kruga i njegove unutrašnje oblasti naziva se *kružna površ*. Tačka u ravni kruga, koja ne pripada odgovarajućoj kružnoj površi, naziva se *spoljna tačka kruga*, a skup svih takvih tačaka *spoljašnja oblast kruga*.

Napomenimo da se često u literaturi umesto termina krug koristi termin *kružnica* ili *kružna linija*, a za kružnu površ termin krug.

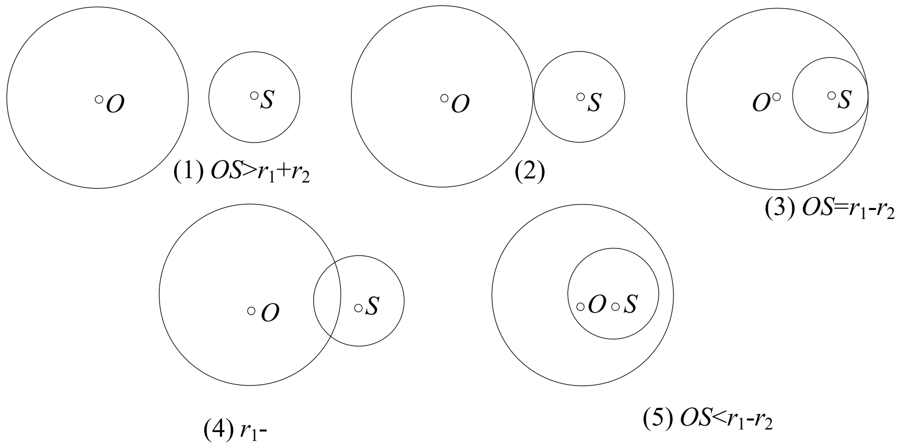


Jedan od najvažnijih pojmova povezanih sa krugom je pojam tetive. *Tetiva* nekog kruga je duž AB pri čemu su A i B proizvoljne tačke na tom krugu. Ako je C podnožje upravne iz centra O tog kruga na tetivi AB, tada se dužina duži OC naziva *centralno odstojanje* tetive AB. Lako se dokazuje da su dve tetive nekog kruga podudarne ako i samo ako imaju jednaka centralna odstojanja. Najduža tetiva nekog kruga naziva se *prečnik* ili *dijametar* tog kruga. Prečnik kruga sadrži centar kruga.

U zavisnosti od odstojanja centra kruga od neke date prave možemo razmatrati razne položaje prave prema krugu. Ako je odstojanje manje od poluprečnika ($OC_1<r$) tada se kaže da prava seče krug i takva prava se naziva *sečica* kruga. Sečica i krug imaju dve zajedničke tačke. Ako je centralno odstojanje jednako poluprečniku ($OC_2=r$), kaže se da prava *dodiruje krug*. Takvu pravu zvali smo tangentom kruga. Tangenta kruga ima sa krugom tačno jednu zajedničku tačku. Važno je primetiti da je odgovarajući poluprečnik normalan na tangentu. U slučaju kada je odstojanje prave od centra kruga veće od poluprečnika kruga ($OC_3>r$) tada prava i krug nemaju zajedničkih tačaka. Da bi se dali strogi dokazi iznetih činjenica koriste se aksiome neprekidnosti.



Slično razmatranje možemo primeniti i kada se radi o međusobnom odnosu dva kruga u istoj ravni. Ako su $k(O,r_1)$ i $l(S,r_2)$ $(r_1>r_2)$ pomenuti krugovi, mogući su sledeći slučajevi:



1. Ako je $OS>r_1+r_2$, tada ni krugovi ni odgovarajuće kružne površi nemaju zajedničkih tačaka.

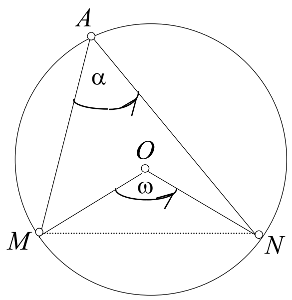
2. Ako je $OS=r_1+r_2$, tada krugovi i odgovarajuće kružne površi imaju tačno jednu zajedničku tačku; u tom slučaju kažemo da se krugovi *spolja dodiruju*.
3. Ako je $OS=r_1 -r_2$, tada krugovi imaju tačno jednu zajedničku tačku, ali je l u kružnoj površi k; u tom slučaju kažemo da se krugovi *iznutra dodiruju*.
4. Ako je $r_1 -r_2 <OS< r_1+r_2$, tada krugovi imaju tačno dve zajedničke tačke i kažemo da se oni *seku*.
5. Ako je $OS< r_1 -r_2$, tada krugovi nemaju zajedničkih tačaka, ali je l u unutrašnjosti kruga k.

Krugovi neke ravni su *koncentrični* ili *ekscentrični* u zavisnosti od toga da li im se centri poklapaju ili ne.

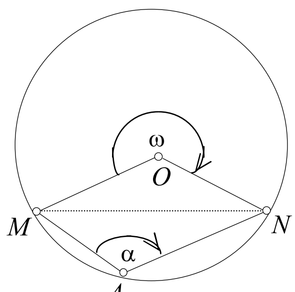
Ugao između dva kruga koji se seku je ugao između njegovih tangenti u presečnoj tački. Ako je taj ugao prav, krugovi su *ortogonalni* (*normalni*).

5.2 Centralni i periferijski ugao kruga

Neka je $k(O,r)$ krug. *Centralni ugao kruga* je svaki ugao u ravni kruga čije je teme tačka O. *Periferijski ugao kruga* je ugao čije je teme neka tačka kruga, a kraci sadrže tetive kruga. Tetiva kruga čije su krajnje tačke na kracima periferijskog ili centralnog ugla je njihova *odgovarajuća tetiva*. U tom slučaju kažemo da su ti uglovi *nad tom tetivom*. Centralni i



$A,O \ddot{-} MN$



$A,O \div MN$

periferijski uglovi nekog kruga su jedan drugom *odgovarajući* ako su nad istom tetivom i iste orijentacije. Npr. ako su centar kruga i teme periferijskog ugla sa iste strane prave određene tetivom, odgovarajući centralni ugao je konveksan. Ako su te tačke sa raznih strana te prave, odgovarajući centralni ugao je nekonveksan.

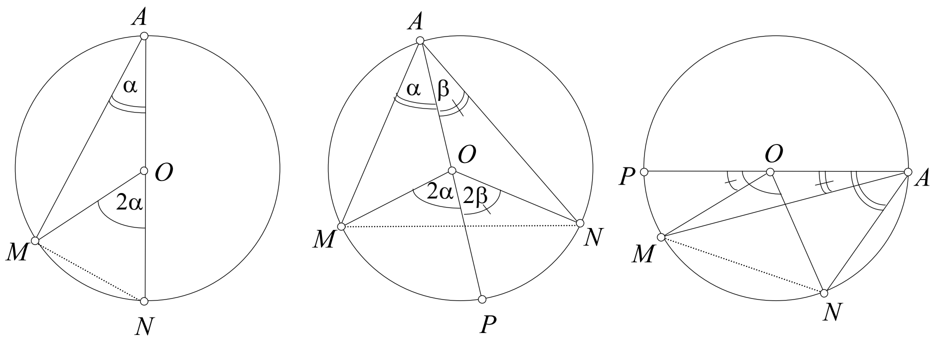
Veoma je značajna relacija koja povezuje odgovarajuće centralne i periferijske uglove jednog kruga[22]:

Teorema 1. Centralni ugao je dva puta veći od odgovarajućeg periferijskog ugla kruga tj. ako su A, M, N proizvoljne tačke kruga $k(O,r)$ tada je: $\angle MON=2\angle MAN$.

Dokaz. Razmotrimo sledeće slučajeve:

1) Centar kruga pripada kraku AN periferijskog ugla $\angle MAN$. Tada je trougao MOA jednakokraki ($OM=OA=r$) pa su uglovi OMA i MAO podudarni. U trouglu MOA spoljašnji ugao MON jednak je zbiru nesusednih unutrašnjih uglova: $\angle MON=\angle OMA+\angle MAO=2\angle MAO=2\angle MAN$.

2) Centar kruga pripada unutrašnjosti periferijskog ugla. Neka je P druga presečna tačka kruga sa pravom OA. Tada je (primenjujemo rezultat slučaja 1):



$\angle MON=\angle MOP+\angle PON=2\angle MAO+2\angle NAO=2(\angle MAO+\angle NAO)=2\angle MAN$.

3) Centar kruga je van periferijskog ugla. Ponovo na isti način uvedimo tačku P i primenimo rezultat prvog slučaja:

$\angle MON=\angle PON -\angle POM=2\angle PAN -2\angle PAM=2(\angle PAN -\angle PAM)=2\angle MAN$. ❑

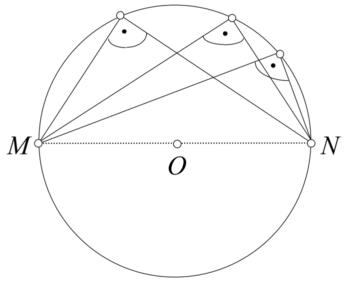
Dokaz prethodne teoreme je isti bez obzira da li su tačke A i O sa iste ili sa raznih strana prave MN.

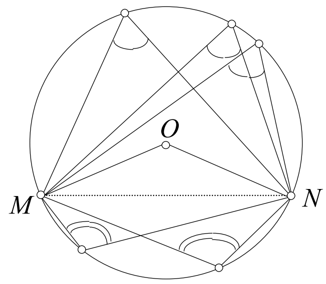
[22] Pretpostavlja se da je ovo tvrđenje prvi dokazao *Tales iz Mileta* (*VII-VI* v. pre n. e.).

Najznačajnije posledice teoreme 1 su:

Posledica 1. Periferijski ugao nad prečnikom kruga je prav.

Dokaz: zasniva se na prethodnoj teoremi i činjenici da je centralni ugao nad prečnikom opružen. ❑





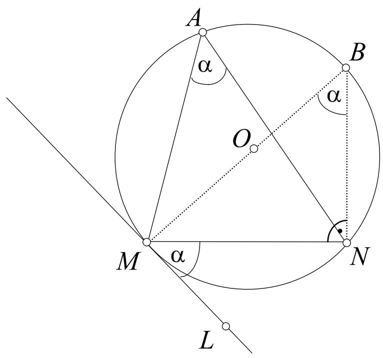
Posledica 2. *a*) Periferijski uglovi kruga nad istom tetivom, čija su temena sa iste strane prave određene tom tetivom, su međusobno podudarni.

b) Periferijski uglovi kruga nad istom tetivom, čija su temena sa raznih strana prave određene tom tetivom, su suplementni.

Dokaz: Ovi uglovi odgovaraju istom centralnom uglu, ili centralnim uglovima čiji je zbir jednak 360°, u zavisnosti od položaja temena. U oba slučaja tvrđenje je direktna posledica teoreme 1. ❑

Posledica 3. Ugao određen tetivom i tangentom u jednoj krajnjoj tački tetive nekog kruga podudaran je periferijskom uglu nad tom tetivom.

Dokaz: Neka je MAN periferijski ugao nekog kruga nad tetivom MN, LM tangenta tog kruga u tački M tako da je $L,A \div MN$ i MB prečnik tog kruga. Tada je $BM \perp ML$ i $BN \perp MN$ (posledica 1), pa su uglovi LMN i MBN podudarni kao uglovi sa normalnim kracima. Ali na osnovu posledice 2 su i uglovi MAN i MBN podudarni, iz čega sledi tvrđenje. ❑

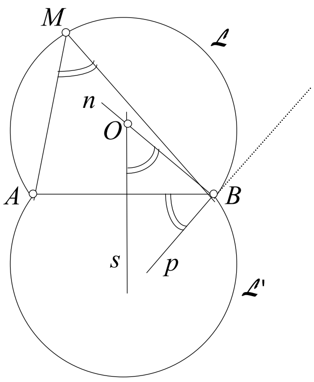


Poslednji rezultati omogućuju da

se realizuje jedna izuzetno značajna konstrukcija - konstrukcija geometrijskog mesta tačaka u ravni iz kojih se data duž "vidi" pod datim uglom (o konstrukcijama biće više reči u narednoj glavi). Radi se zapravo o sledećem problemu:

- *Ako je AB duž i φ ugao neke ravni, odrediti skup svih tačaka M te ravni takvih da je $\angle AMB \cong \varphi$.*

Neka je p poluprava sa početnom tačkom B takva da je $\angle p,BA \cong \varphi$, n normala u tački B na polupravoj p i s medijatrisa duži. Presečnu tačku pravih n i s označimo sa O. Ako je k krug sa centrom O i poluprečnikom OA, sa $\mathcal{L}$ označimo presek tog kruga i poluravni sa rubom AB a kojoj ne pripada poluprava p. Skup $\mathcal{L}$ inače naziva se *luk AB*. U drugoj poluravni na sličan način možemo odrediti luk $\mathcal{L}'$ (simetričan luku $\mathcal{L}$). Dokažimo da je traženo geometrijsko mesto tačaka



$(\mathcal{L} \cup \mathcal{L}') \setminus \{A,B\}$. Da se iz svake tačke luka $\mathcal{L}$ (ili $\mathcal{L}'$), različite od A i B, duž AB vidi pod uglom φ sledi iz posledice 3. Pretpostavimo da tačka M ne pripada $(\mathcal{L} \cup \mathcal{L}') \setminus \{A,B\}$. U slučaju kada je M tačka A ili B, ugao AMB ne postoji. Neka je $M \neq A,B$ i $AM \cap \mathcal{L} = \{N\}$. Ako je $\mathcal{B}(A,M,N)$ u trouglu NMB je spoljašnji ugao AMB veći od nesusednog unutrašnjeg ugla MNB ($\cong \varphi$). Ako je $\mathcal{B}(A,N,M)$ sličnim razmatranjem zaključujemo da je $\angle AMB < \varphi$, pa ne može biti $\angle AMB \cong \varphi$. ❑

> ***Primer 1.*** Dokazati da se medijatrisa ivice BC i medijatrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC ($AB \neq AC$) seku u tački koja pripada krugu opisanom oko tog trougla. Pritom je ta tačka središte luka BC tog kruga, na kome nije teme A.

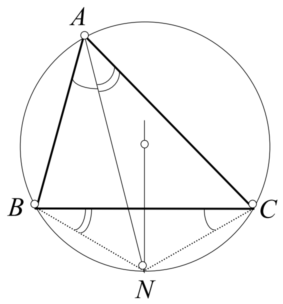
Rešenje: Neka je N jedna od presečnih tačaka kruga opisanog oko trougla ABC i medijatrise ivice BC (takva da je $A,N \div BC$). Kako je N na medijatrisi ivice BC, mora biti $NB \cong NC$. Dakle, trougao BNC je jednakokraki, pa su i uglovi NBC i NCB podudarni. Tada je:

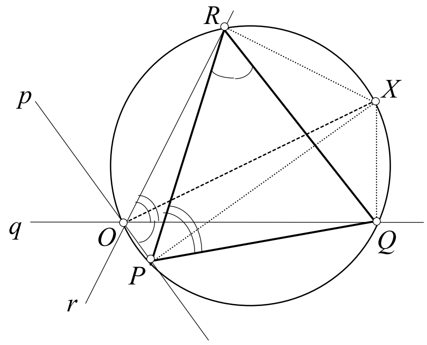
$BAN \cong \angle BCN$ (periferijski uglovi nad tetivom BN)

$\cong \angle NBC \cong \angle NAC$ (periferijski uglovi nad tetivom CN).

Prema tome, poluprava AN je bisektrisa ugla BAC, čime je tvrđenje dokazano.

Napomenimo da smo izostavili dokaz da je $A,B \div NC$ i $A,C \div NB$. Dokazivanje rasporeda u ovakvim zadacima često nije tako jednostavno, pa ga zbog toga najčešće ne izvodimo. ❑





Primer 2. Neka su p, q, r prave neke ravni koje se seku u jednoj tački i dele tu ravan na šest podudarnih uglova. Ako su P, Q, R podnožja upravnih iz proizvoljne tačke X te ravni redom na tim pravama, dokazati da je trougao PQR pravilan.

Rešenje: Neka je O presečna tačka pravih p, q, r. Kako je $\angle XPO \cong \angle XQO \cong \angle XRO = 90^{\circ}$, tačke O, X, P, Q, R pripadaju krugu k nad OX kao prečnikom. Tada je: $\angle PRQ \cong \angle POQ = 60^{\circ}$; $\angle QPR \cong \angle QOR = 60^{\circ}$ (kao periferijski uglovi kruga k nad tetivama QP i QR), pa je trougao PQR pravilan.

Zadaci

1. Neka je k krug sa prečnikom AB i C tačka u ravni tog kruga. Dokazati:

   (i) Ako je C unutrašnja tačka kruga k, tada je ugao ACB tup.

   (ii) Ako C pripada krugu k, tada je ugao ACB prav.

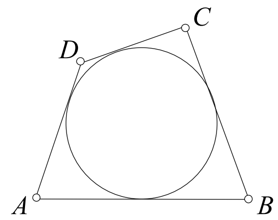
   (iii) Ako je C spoljašnja tačka kruga tada je ugao ACB oštar.

2. Svi periferijski uglovi nad podudarnim tetivama, u jednom krugu ili u podudarnim krugovima su podudarni. Dokazati.

3. Ugao između dve sečice, koje se seku van kruga, jednak je polovini razlike centralnih uglova nad tetivama između krakova tog ugla. Dokazati.
4. Ugao između dve tangente jednog kruga jednak je polovini razlike centralnih uglova nad lukovima između krakova tog ugla. Dokazati.
5. Ako su krugovi k i l ortogonalni, tangenta ma kojeg od njih sadrži centar drugog. Dokazati.

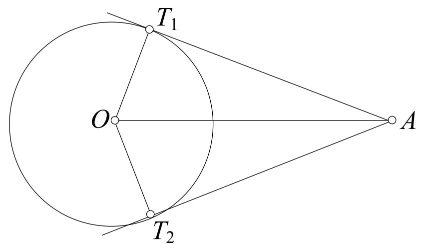
5.3. Tangentni četvorougao

Četvorougao čije su sve ivice tangente jednog kruga tj. četvorougao u koji se može upisati krug, naziva se *tangentni četvorougao*. Postoji, i veoma je operativan, kriterijum za utvrđivanje da li je neki četvorougao tangentni. Za dokazivanje tog kriterijuma koristi se teorema o podudarnosti *tangentnih duži*, tj. odsečaka tangente od tačke iz koje je ona konstruisana na dati krug do tačke dodira.



Teorema 1. Tangentne duži konstruisane iz iste tačke van datog kruga su međusobno podudarne.

Dokaz: Neka su AT_1 i AT_2 tangente nekog kruga k, sa centrom O, u dodirnim tačkama T_1 i T_2. Tada su pravougli trouglovi AT_1O i AT_2O podudarni jer im je hipotenuza AO zajednička, a katete OT_1 i OT_2 podudarne sa poluprečnikom kruga. Dakle $AT_1 \cong AT_2$. ❑

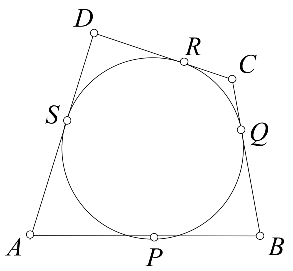


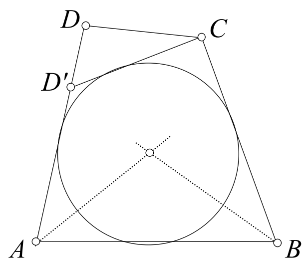
Sada dokazujemo osnovnu teoremu o tangentnim četvorouglovima:

Teorema 2. Četvorougao $ABCD$ je tangentni ako i samo ako je:

$$AB+CD=BC+AD.$$

Dokaz: $\Rightarrow$. Pretpostavimo da je četvorougao $ABCD$ tangentni. Neka su P, Q, R, S dodirne tačke ivica AB, BC, CD, DA sa upisanim krugom k. Kako su tangentne duži podudarne, to je: $AP \cong AS$; $BP \cong BQ$; $CQ \cong CR$; $DR \cong DS$. Na osnovu toga je: $AP+PB+CR+RD=AS+SD+BQ+QC$ tj. $AB+CD=AD+BC$.





$\Leftarrow$. Sada dokazujemo obratno tvrđenje. Neka su u četvorouglu $ABCD$ zbirovi naspramnih ivica jednaki. Postoji krug k koji dodiruje ivice AB, BC, i DA tog četvorougla (njegov centar je presek bisektrisa unutrašnjih uglova kod temena A i B četvorougla).

Neka je D' presek druge tangente iz tačke C kruga k i prave AD. Pretpostavimo da je $D' \neq D$. i $\mathcal{B}(A,D',D)$. Prema već dokazanom delu teoreme važi $AB+CD=BC+D'A$, pa kako je po pretpostavci $AB+CD=BC+DA$, to je $CD'-CD=D'A-DA$, tj. $CD'=D'A-DA+CD$. Ako je tačka D između tačaka D' i A ova relacija postaje $CD'=CD+DD'$ a to je nemoguće na osnovu nejednakosti trougla. Na sličan način dolazimo do kontradikcije i u slučaju kada D nije između tačaka D' i A. Dakle, $D'=D$, tj. krug k dodiruje i četvrtu ivicu četvorougla $ABCD$. ❑

Neposredna posledica ove teoreme je da se u kvadrat, romb i deltoid (v. zad. 6.11) mogu upisati krugovi.

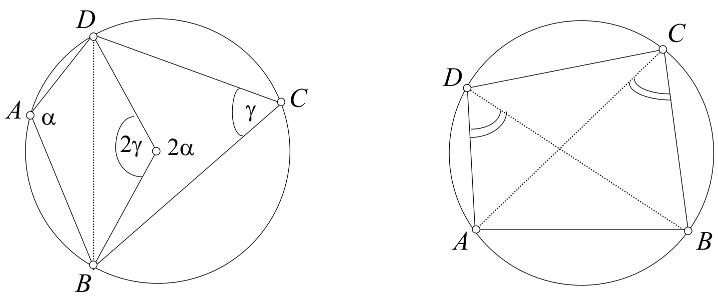
5.4 Tetivni četvorougao

Četvorougao oko koga se može opisati krug, tj. čije su sve ivice tetive nekog kruga naziva se *tetivni četvorougao*. Kao što postoji kriterijum za utvrđivanje da li je četvorougao tangentni, postoji i važna teorema koja daje neophodan i dovoljan uslov da četvorougao bude tetivni.

Teorema 1. Konveksni četvorougao je tetivni ako i samo ako su njegovi naspramni uglovi suplementni.

Dokaz: $\Rightarrow$. Pretpostavimo, najpre da je četvorougao *ABCD* tetivni. Kako je četvorougao konveksan, temena *A* i *C* su sa raznih strana prave određene dijagonalom *BD*. Na osnovu posledice 2, iz odeljka 5.2, uglovi *BAD* i *BCD* četvorougla su suplementni.

$\Leftarrow$. Pretpostavimo sada da su naspramni uglovi četvorougla *ABCD* suplementni. Neka je *k* krug opisan oko trougla *ABD*. Tada se iz četvrtog temena *C* tetiva *BD* vidi pod uglom koji je suplementan uglu kod temena *A*, pa i tačka *C* pripada krugu. ❑



Često se pri dokazivanju pojedinih tvrđenja koristi i sledeća teorema:

Teorema 2. Ako je *ABCD* konveksan četvorougao i $\angle ACB \cong \angle ADB$ tada je on tetivni četvorougao.

Dokaz ove teoreme vrlo je jednostavan - koristi se činjenica da je geometrijsko mesto tačaka iz kojih se duž *AB* vidi pod istim uglom, u poluravni (*ABC* - kružni luk. ❑

Važi i obratno tvrđenje ali je ono od manjeg značaja.

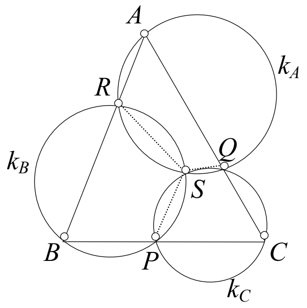
> **Primer 1.** Neka su *P*, *Q*, *R* proizvoljne tačke ivica *BC*, *AC*, *AB* trougla *ABC*. Dokazati da se krugovi opisani oko trouglova *AQR*, *PBR*, *PQC* seku u jednoj tački (tzv. *Mikelova tačka*[23]).

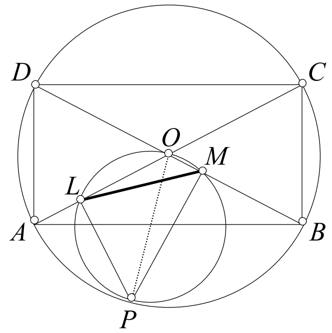
Rešenje: Označimo krugove opisane oko trouglova *AQR*, *PBR* i *PQC* sa k_A, k_B, k_C, i unutrašnje uglove trougla *ABC* redom sa α, β, γ.

Neka je *S* druga presečna tačka krugova k_B i k_C (sličan je dokaz i u slučaju S=P). Tada su četvorouglovi *BPSR* i *PCQS* tetivni, pa je

[23] *A. Mikel* dokazao je ovo tvrđenje 1838 g.

$\angle RSP$=180°-β i $\angle QSP$=180°-γ. Sledi da je $\angle RSQ$=β+γ, a zatim i $\angle RAQ$+$\angle RSQ$= α+β+γ=180°. Dakle i četvorougao *ARSQ* je tetivan, pa se oko njega može opisati krug. Ali to je baš krug k_A, opisan oko trougla *AQR*, pa se dati krugovi seku u tački *S*. ❑

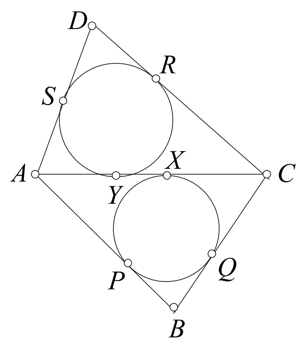




Primer 2. Neka je *P* proizvoljna tačka na kraćem luku *AB* kruga *k* opisanog oko pravougaonika *ABCD*, a *L* i *M* podnožja upravnih iz tačke *P* na dijagonalama *AC* i *BD*. Dokazati da dužina duži *LM* ne zavisi od položaja tačke *P*.

Rešenje: Neka je tačka *O* centar kruga *k*. Četvorougao *PMOL* je tetivan jer je $\angle OLP$+$\angle OMP$=180°. Kako su uglovi *OLP* i *OMP* pravi, prečnik kruga *l*, opisanog oko četvorougla *PMOL* je *OP* tj. poluprečnik kruga *k*. Dalje, *LM* je tetiva kruga *l* koja odgovara periferijskom uglu *AOB*. Dakle, bez obzira na izbor tačke *P*, duž *LM* je tetiva kruga sa prečnikom *OA*, koja odgovara periferijskom uglu *AOB* (odnosno odgovarajućem konstantnom centralnom uglu). Tetive koje odgovaraju podudarnim centralnim uglovima podudarnih krugova su među sobom podudarne, pa dužina duži *LM* ne zavisi od položaja tačke *P*. ❑

Primer 3. Neka je *ABCD* konveksan četvorougao. Dokazati da se krugovi upisani u trouglove *ABC* i *ACD* dodiruju ako i samo ako je četvorougao *ABCD* tangentan.



Rešenje: U ovom zadatku ekvivalenciju nećemo dokazivati u dva smera već direktno. Pre toga izvedimo neke relacije koje važe kod proizvoljnog konveksnog četvorougla *ABCD*. Neka su *P*, *Q*, *X* dodirne tačke upisanog kruga k trougla ABC sa njegovim ivicama AB, BC, CA i R, S, Y dodirne tačke upisanog kruga l trougla ACD sa njegovim ivicama CD, DA, AC. Najpre je:

$$AX=AP=\frac{1}{2}(AX+AP)=\frac{1}{2}(AC-CX+AB-BP)=\frac{1}{2}(AC-CQ+AB-BQ)$$
$$=\frac{1}{2}(AC+AB-BC).\ (1)$$

Na isti način dokazujemo i da je $AY=\frac{1}{2}\ (AC+AD-DC)$. (2)

Sada možemo početi sa dokazivanjem ekvivalencije:

Krugovi k i l se dodiruju akko je $X=Y$, tj. akko $AX=AY$. Na osnovu (1) i (2) je: $AX=AY$ akko $AC+AB-BC=AC+AD-DC$, odnosno akko $AB+DC=AD+BC$. Poslednja jednakost važi akko je četvorougao $ABCD$ tangentan. ❑

Zadaci

1. Dokazati da dodirne tačke upisanog kruga dele ivice trougla ABC na odsečke dužina: s-a, s-b, s-c, (a, b, c -dužine ivica; s -poluobim trougla).
2. U pravouglom trouglu ABC nad katetom AC kao prečnikom konstruisan je krug, koji seče hipotenuzu AB u tački E. Ako tangenta kruga u tački E seče katetu BC u tački D, dokazati da je trougao BDE jednakokraki.
3. U prav ugao sa temenom A upisan je krug koji dodiruje krake ugla u tačkama B i C. Proizvoljna tangenta kruga seče prave AB i AC, redom, u tačkama M i N (gde je $\mathcal{B}(A,M,B)$). Dokazati da je:
$$\frac{1}{3}(AB+AC) < MB+NC < \frac{1}{2}(AB+AC).$$
4. Dokazati da je kod pravouglog trougla zbir kateta jednak zbiru prečnika opisanog i upisanog kruga.
5. Dokazati da četiri od šest tačaka, u kojima se seku bisektrise unutrašnjih uglova konveksnog četvorougla, ukoliko su različite, predstavljaju temena tetivnog četvorougla.

6. Neka je u pravouglom trouglu c dužina hipotenuze, a i b dužine kateta, a r poluprečnik upisanog kruga. Dokazati da je:

   (i) $2r + c \geq 2\sqrt{ab}$ (ii) $a + b + c > 8r$

7. Ako su P i Q središta kraćih lukova AB i AC kruga opisanog oko pravilnog tougla ABC, dokazati da ivice AB i AC tog trougla dele tetivu PQ na tri podudarne duži.

8. Četiri kruga sa centrima O_1, O_2, O_3, O_4 dodiruju se spolja dva po dva. Dokazati:

   (i) da je četvorougao $O_1O_2O_3O_4$ tangentni;

   (ii) da su dodirne tačke ovih krugova temena tetivnog četvorougla.

9. Neka su k_1, k_2, k_3, k_4 četiri kruga od kojih svaki spolja dodiruje jednu ivicu i po dve poluprave određene ivicama proizvoljnog konveksnog četvorougla. Dokazati da su centri tih krugova *konciklične tačke* (pripadaju jednom krugu).

10. Krugovi k i l dodiruju se spolja u tački A. Ako su B i C dodirne tačke zajedničke spoljašnje tangente ovih krugova, dokazati da je ugao BAC prav.

11. Neka je u konveksnom četvorouglu $ABCD$ $AB \cong AD$ i $CB \cong CD$ (tzv. *deltoid*). Dokazati:

    (i) u četvorougao $ABCD$ se može upisati krug;

    (ii) oko četvorougla $ABCD$ se može opisati krug akko je $AB \perp BC$.

12. Krugovi k i k_1 se spolja dodiruju u tački T. Ako su P i P_1 odnosno Q i Q_1 presečne tačke pravih p i q koje sadrže tačku T, sa tim krugovima redom, dokazati da je $PQ \| P_1Q_1$.

13. Neka je MN zajednička tangenta krugova k i l (M i N su dodirne tačke) koji se se seku u tačkama A i B. Izračunati zbir $\angle MAN + \angle MBN$.

14. Tačke simetrične ortocentru trougla u odnosu na njegove ivice pripadaju krugu opisanom oko tog trougla. Dokazati.

15. Krugovi određeni sa dva temena trougla i njegovim ortocentrom podudarni su krugu opisanom oko tog trougla. Dokazati.

16. Neka je t tangenta kruga opisanog oko trougla ABC u temenu A. Ako prava koja je paralelna sa t, seče ivice AB i AC u tačkama D i E, dokazati da tačke B, C, D, E pripadaju jednom krugu.

17. Neka su D i E proizvoljne tačke polukruga konstruisanog nad duži AB. Ako je F presek pravih AD i BE, a G presek pravih AE i BD, dokazati da je $FG \perp AB$.

18. Neka je M tačka kruga $k(O,r)$. Odrediti geometrijsko mesto središta svih tetiva kruga čija je jedna krajnja tačka M.

19. Dokazati da su podnožja upravnih iz proizvoljne tačke opisanog kruga trougla na pravama određenim njegovim ivicama, tri kolinearne tačke. (Prava koja ih sadrži naziva se *Simsonova*[24] *prava.*)

20. Teme ugla α je spoljašnja tačka kruga k. Kraci tog ugla određuju na krugu dva luka, koji su u razmeri 3:10. Veći od tih lukova odgovara centralnom uglu od 40°. Kolika je mera ugla α.

21. Dokazati da je ortocentar oštrouglog trougla, centar upisanog kruga čija su temena podnožja visina polaznog trougla.

22. Neka su M i N tačke simetrične podnožju A' visine AA' trougla ABC u odnosu na ivice AB i AC i neka je K presek pravih AB i MN. Dokazati da tačke A, K, A', C, N pripadaju jednom krugu.

23. Neka je D podnožje visine iz temena A oštrouglog trougla ABC i O centar opisanog kruga tog trougla. Dokazati da je $\angle CAD \cong \angle BAO$.

24. Oko trougla ABC opisan je krug. Ako je tačka D dijametralno suprotna tački A u odnosu na taj krug, dokazati da je ona simetrična ortocentru trougla u odnosu na središte ivice BC.

25. Ako je $ABCD$ tetivni četvorougao, E ortocentar trougla ABD i F ortocentar trougla ABC, dokazati da je četvorougao $CDEF$ paralelogram.

26. Krugovi sa centrima O_1 i O_2 imaju zajedničke tačke A i B. Prava p, koja sadrži tačku A seče te krugove u tačkama M_1 i M_2. Dokazati da je $\angle O_1M_1B \cong \angle O_2M_2B$.

27. Tri podudarna kruga k_1, k_2, k_3 sa centrima O_1, O_2, O_3 seku se u tački B. Neka su A_3, A_2, A_1 druge presečne tačke prvog i drugog, prvog i

[24] *R. Simson* (1687-1768), engleski matematičar.

trećeg, odnosno drugog i trećeg kruga. Dokazati da se prave O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 seku u jednoj tački.

28. Nad duži AB, kao prečnikom konstruisan je polukrug sa centrom O. Neka su C i D tačke duži AB takve da je $CO \cong OD$. Dve paralelne prave koje sadrže tačke C i D seku polukrug u tačkama E i F. Dokazati da su duži CE i DF normalne na EF.

29. Neka je C tačka tetive AB kruga k sa centrom O i D drugi presek kruga k sa krugom opisanim oko trougla ACO. Dokazati da je $CD \cong CB$.

30. Ako je C središte luka AB i D bilo koja druga tačka tog luka, različita od C, dokazati da je:
$$AC+BC > AD+BD.$$

31. Neka su A i B tačke van kruga k i prava AB ne seče k. Ako su C i D dodirne tačke tangenti tog kruga koje sadrže tačke A i B redom, dokazati da je:
$$|AC-BD| < AB < AC+BD.$$

32. Ako je S tačka u kojoj se seku prave određene kracima AD i BC trapeza $ABCD$, dokazati da se krugovi opisani oko trouglova SAB i SCD dodiruju u tački S.

33. Neka su PB i PD tangente kruga $k(O,r)$ u dodirnim tačkama B i D. Ako prava PO seče krug k u tačkama A i C ($\mathcal{B}(P,A,C)$), dokazati da je poluprava BA bisektrisa ugla PBD.

34. Četvorougao $ABCD$ upisan je u krug sa centrom O. Dijagonale AC i BD međusobno su normalne. Ako je M podnožje upravne iz centra O na pravoj AD, dokazati da je $OM=\frac{1}{2}BC$.

35. Ako je S centar upisanog kruga trougla ABC i N presečna tačka poluprave AS sa krugom opisanim oko tog trougla, dokazati da je $NB \cong NS \cong NC$. Šta predstavlja tačka simetrična tački S u odnosu na N ?

36. Neka su P, Q, R središta lukova BC, AC, AB kruga opisanog oko trougla ABC, na kojima nisu temena A, B, C. Ako su E i F preseci prave QR sa ivicama AB i AC, a S centar upisanog kruga tog trougla, dokazati da je:

(*i*) $AP \perp QR$;

(ii) četvorougao $AESF$ romb.

37. Neka su AB i BC dve susedne ivice pravilnog devetougla upisanog u krug, čiji je centar tačka O. Ako je M središte ivice AB i N središte poluprečnika OX, koji je normalan na pravoj BC, dokazati da je $\angle OMN=30^{\circ}$.

38. Krugovi k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Neka je p prava koja sadrži tačku A i krug k_1 seče u tački C a krug k_2 u tački D i q prava koja sadrži tačku B i krug k_1 seče u tački E a krug k_2 u tački F. Dokazati da je $\angle CBD \cong \angle EAF$.

39. Krugovi k_1 i k_2 seku se u tačkama A i B. Odrediti pravu p, koja prolazi kroz tačku A tako da duž MN, gde su M i N tačke u kojima prava p seče krugove k_1 i k_2 bude maksimalne dužine.

40. Neka je L podnožje upravne iz bilo koje tačke K kruga k na njenu tangentu u tački $T \in k$ i X tačka simetrična tački L u odnosu na pravu KT. Odrediti geometrijsko mesto tačaka X.

41. U krug je upisan poligon sa neparnim brojem ivica, takav da su mu svi uglovi podudarni. Dokazati da je taj poligon pravilan.

42. Ako su dijagonale tetivnog četvorougla $ABCD$ upravne u tački S, dokazati da normala iz tačke S na pravoj AB sadrži središte duži CD[25].

43. Dužine ivica trougla su 6, 7, 9. Neka su k_1, k_2, k_3 krugovi, čiji su centri temena tog trougla i koji se međusobno dodiruju, pri čemu krug, čiji je centar teme najmanjeg ugla trougla, ima sa ostalim krugovima unutrašnji dodir, a dva preostala kruga se dodiruju spolja. Izračunati dužine poluprečnika ta tri kruga.

44. Dva kruga dodiruju se iznutra u tački A. Ako je AB prečnik većeg kruga i tetiva BK većeg kruga dodiruje manji krug u tački C, dokazati da je poluprava AC bisektrisa ugla BAK.

45. Neka su A_1, A_2, A_3, A_4 proizvoljne tačke na krugu i B_1, B_2, B_3, B_4 središta lukova A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 redom. Dokazati da među dužima određenim krajnjim tačkama B_1, B_2, B_3, B_4 postoje dve međusobno upravne.

---

[25] *Brahmagupta* (598-660), indijski matematičar, proučavao je tetivne četvorouglove.

46. Neka je BC tetiva kruga k. Odrediti geometrijsko mesto ortocentara svih trouglova ABC pri čemu je A proizvoljna tačka kruga.

47. Ako u nekom četvorouglu postoje tri tupa ugla, dokazati da je veća dijagonala ona koja je određena temenom koje odgovara oštrom uglu.

48. Šestougao $ABCDEF$ upisan je u krug. Ako je $AB \cong DE$ i $BC \cong EF$, dokazati da je $CD \| AF$.

49. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao, kod koga je $\angle ABD = 50^{\circ}$, $\angle ADB = 80^{\circ}$, $\angle ACB = 40^{\circ}$, $\angle DBC = \angle BDC + 30^{\circ}$. Izračunati meru ugla DBC.

50. Neka je M proizvoljna tačka koja pripada uglu sa temenom A. Ako su su P i Q podnožja upravnih iz tačke M, na krake tog ugla, a K podnožje upravne iz temena A na pravoj PQ, dokazati da je $\angle MAP \cong \angle QAK$.

51. Osmougao $A_1A_2...A_8$ je upisan u krug i važi $A_1A_2 \| A_5A_6$, $A_2A_3 \| A_6A_7$, $A_3A_4 \| A_7A_8$. Dokazati da je $A_8A_1 \cong A_4A_5$.

52. Ako neki krug odseca na ivicama četvorougla podudarne odsečke, dokazati da je taj četvorougao tangentni.

53. Oko kruga opisan je petougao $ABCDE$ čije su dužine ivica prirodni brojevi i kod koga je $AB = CD = 1$. Krug dodiruje ivicu BC u tački K. Odrediti dužinu duži BK.

54. Ako se od tri kruga neke ravni po dva spolja dodiruju, dokazati da je krug određen dodirnim tačkama tih krugova ortogonalan na svakom od njih.

55. Ako je AE bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A oštrouglog trougla ABC ($AB < AC$, $E \in BC$), O centar opisanog kruga, A_1 središte ivice BC i A' podnožje visine iz temena A tog trougla, dokazati da je:

   (*i*) $\mathcal{B}(A', E, A_1)$;

   (*ii*) $\angle A'AE \cong \angle EAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$.

56. Dokazati da krug koji sadrži dva susedna temena A i B pravilnog petougla $ABCDE$ i centar O tog petougla, sadrži i tačku preseka njegovih dijagonala AD i BE.

57. Neka je H ortocentar trougla ABC, l krug nad duži AH kao prečnikom i P, Q presečne tačke tog kruga sa ivicama AB i AC. Dokazati da se tangente kruga k u tačkama P i Q seku na ivici BC.

58. Krug l dodiruje iznutra krug k u tački C. Neka je M proizvoljna tačka kruga l različita od C. Tangenta kruga l u tački M seče krug k u tačkama A i B. Dokazati da je $\angle ACM \cong \angle MCB$.

59. Tri kruga jednakih poluprečnika r seku se u tački O i, osim toga, dva po dva od njih seku se u tačkama A, B, C. Dokazati da je krug opisan oko trougla ABC, takođe poluprečnika r.

60. Neka je k krug opisan oko trougla ABC i R središte luka AB tog kruga na kome nije tačka C. Ako su RP i RQ tetive od kojih je prva paralelna a druga upravna na bisektrisi unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC, dokazati da je:

(*i*) poluprava BQ bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena B trougla ABC;

(*ii*) trougao koji određuju prave AB, AC, PR jednakokraki.

61. Nad ivicama trougla ABC sa spoljne strane konstruisani su pravilni trouglovi ADB, BEC, CFA.

(*i*) Dokazati da su duži AE, BF, CD među sobom podudarne.

(*ii*) Dokazati da se prave AE, BF, CD seku u jednoj tački (tzv. *Toričelijevoj*[26] *tački* tog trougla), pod uglom 60°.

62. Neka je X unutrašnja tačka trougla ABC takva da je: $\angle BXC \cong \angle BAC + 60^\circ$, $\angle AXC \cong \angle ABC + 60^\circ$, $\angle AXB \cong \angle ACB + 60^\circ$. Ako su P, Q, R druge presčne tačke pravih AX, BX, CX sa krugom opisanim oko trougla ABC, dokazati da je trougao PQR pravilan.

63. Neka su P, Q, R dodirne tačke upisanog kruga $k(S,r)$ trougla ABC sa njegovim ivicama $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ $(b>c)$ i P_i, Q_i, R_i; $i \in \{a,b,c\}$ dodirne tačke spolja upisanih krugova $k_i(S_i,r_i)$ sa pravama BC, AC, AB. Neka je dalje: $l(O,R)$ krug opisan oko tog trougla, s poluobim, A_1 središte ivice BC, M i N presečne tačke prave OA_1 sa krugom l $(N,A \div BC)$ i M', N' podnožja upravnih iz tih tačaka na pravoj AB. Dokazati da je:

(*i*) $AQ_a = AR_a = s$; (*ii*) $AQ = AR = s - a$; (*iii*) $QQ_a = RR_a = a$;

---

[26] *E. Toričeli* (1608-1647), italijanski matematičar i fizičar.

(iv) $PP_a=b-c$; (v) $P_bP_c=b+c$; (vi) A_1 središte duži PP_a i P_bP_c; (vii) $A_1N=\frac{r_a-r}{2}$; ($viii$) $A_1M=\frac{r_b+r_c}{2}$; (ix) $r_a+r_b+r_c=4R+r$;[27] (x) $NN'=\frac{r+r_a}{2}$; (xi) $MM'=\frac{r_b-r_c}{2}$; (xii) $N'B=AM'=\frac{b-c}{2}$; ($xiii$) $AN'=BM'=\frac{b+c}{2}$; (xiv) $M'N'=b$.

[27] Ovo svojstvo trougla otkrio je francuski matematičar *S. A. Ž. Luilie* (1750-1840), 1790. g.

5.5 Relacija upravnosti prave i ravni

Već smo videli da kada je u pitanju međusobni položaj prave p i ravni π postoje dve mogućnosti:

- prava p pripada ravni π ili nema sa njom zajedničkih tačaka; tada je $p \| \pi$,
- prava p ima sa ravni π tačno jednu zajedničku tačku; tada prava p seče ili *prodire* ravan π.

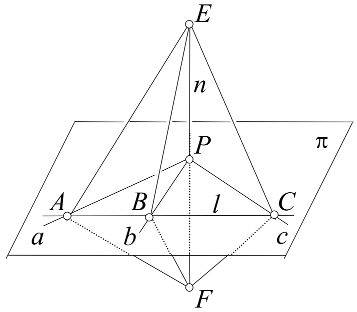
Sada ćemo upoznati jedan specijalan slučaj prodiranja:

Definicija. Prava n je *upravna* (*normalna, ortogonalna*) na ravni π u oznaci $n \perp \pi$ ako prava n prodire ravan π i upravna je na svakoj pravoj ravni π, koja sadrži prodornu tačku. Tada se, takođe, kaže i da je ravan π *upravna* (*normalna, ortogonalna*) na pravoj n u oznaci $\pi \perp n$.

Dokazujemo jednu značajnu teoremu:

Teorema 1. Ako prava n prodire ravan π u tački P i pri tome je upravna na dvema raznim pravama a i b, koje pripadaju ravni π i sadrže tačku P, tada je $n \perp \pi$.

Dokaz (Koši[28]): Dovoljno je dokazati da je prava n upravna na nekoj pravoj c ravni π, koja sadrži tačku P. Neka je l ($P \notin l$) proizvoljna prava koja seče prave a, b, c redom u tačkama A, B, C i E, F tačke prave n sa raznih strana tačke P, takve da je $PE \cong PF$. Tada su podudarni pravougli trouglovi EPA i FPA ($PA \cong PA$, $EP \cong FP$) i EPB, FPB ($PB \cong PB$, $EP \cong FP$), pa sledi da je $AE \cong AF$ i $BE \cong BF$. Na osnovu toga zaključujemo da su podudarni trouglovi EAB i FAB, pa je $\angle EBA \cong \angle FBA$, a onda i $\angle EBC \cong \angle FBC$. Sledi da su trouglovi EBC i FBC podudarni i na osnovu toga je $CE \cong CF$. Na kraju podudarni su trouglovi EPC i FPC (stav SSS), pa su suplementni uglovi EPC i FPC podudarni, dakle pravi, što znači da je $n \perp c$. ❑

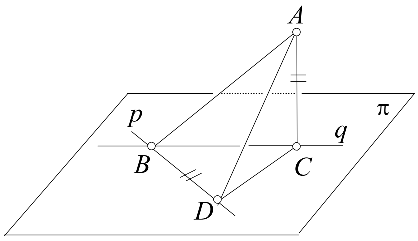


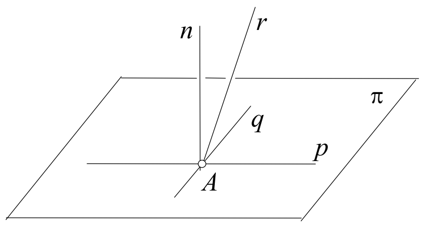
[28] *A. L. Koši* (1789-1853), francuski matematičar izveo je ovaj dokaz 1813. g.

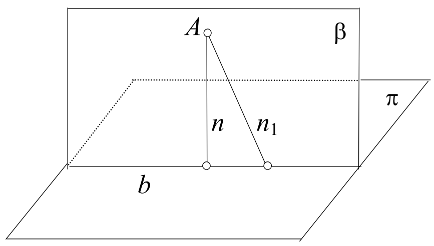
Teorema 2. Postoji tačno jedna prava koja sadrži datu tačku A i upravna je na datoj ravni π.

Dokaz: Najpre ćemo dokazati da takva prava postoji. Razmotrimo dva slučaja:

1) $A \notin \pi$. Neka je p proizvoljna prava ravni π, B podnožje upravne iz tačke A na pravoj p (jedinstvena takva prava postoji na osnovu teoreme 7, iz odeljka 3.4), q prava ravni π, koja sadrži tačku B i normalna je na pravoj p i tačka C podnožje upravne iz tačke A na pravoj q. Dokazaćemo da je prava AC upravna na ravni π. Neka je D tačka prave p, takva da je $AC \cong BD$. Tada su pravougli trouglovi ABC i DCB podudarni ($BC \cong CB$, $AC \cong DB$), pa je i $AB \cong DC$, odakle sledi da su podudarni i trouglovi ABD i DCA ($AB \cong DC$, $AD \cong DA$, $BD \cong CA$). Prema tome $\angle ABD \cong \angle ACD$, znači da je prava AC upravna na pravama DC i q, pa je po teoremi 1, $AC \perp \pi$.





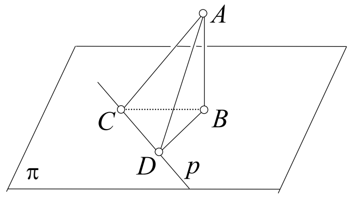


2) $A \in \pi$. Neka su p i q dve prave ravni π, koje se seku u tački A i takve da je $p \perp q$ i neka je r prava koja ne pripada ravni π, sadrži tačku A i upravna je na pravoj p. Prave q i r se seku (u tački A), pa određuju neku ravan α. Neka je n prava ravni α upravna na q u tački A. Dokazaćemo da je prava n upravna na ravni π. Kako je $p \perp \alpha$ ($p \perp q$, $p \perp r$), to je $p \perp n$ a, uzimajući u obzir da je $q \perp n$, po teoremi 1, sledi $n \perp \pi$.

Sada dokazujemo jedinstvenost pomenute normale. Pretpostavimo suprotno, da postoje dve prave n i n_1, koje sadrže tačku A i obe su upravne na ravni π. Prave n i n_1 se seku, pa određuju neku ravan β koja seče π po pravoj b. Tada bi u ravni β postojale, kroz tačku A, dve normale n i n_1 na pravu b, a to je nemoguće na osnovu pomenute teoreme, iz odeljka 3.4. ❑

Teorema 3. **(***O tri normale***)** Neka je prava AB upravna na ravan π u tački B i prava BC upravna na pravoj p ravni π u tački C. Tada je prava AC upravna na pravoj p.

Dokaz: Neka je D tačka prave p takva da je $AB \cong CD$. Tada su pravougli trouglovi ABC i DCB podudarni, odakle zaključujemo da je $AC \cong BD$, pa su podudarni i trouglovi ABD i DCA ($AD \cong DA$, $BD \cong CA$, $AB \cong DC$). Dakle $\angle ABD \cong \angle ACD$, tj. $AC \perp p$. ❑



Zadaci

1. Dokazati da postoji tačno jedna ravan koja sadrži datu tačku i upravna je na datoj pravoj.
2. Ako su dve ravni upravne na istoj pravoj, dokazati da su među sobom paralelne.
3. Ako su prave m i n paralelne i $m \perp \alpha$, tada je $n \perp \alpha$. Dokazati.
4. Ako su prave m i n upravne na istoj ravni, dokazati da su među sobom paralelne.
5. Neka prava AC ne pripada ravni π i nije upravna na njoj, ali je upravna na jednoj pravoj p ravni π, koja sadrži tačku C i neka je B podnožje normale iz A u ravni π. Dokazati da je $BC \perp p$.

5.6 Diedar. Ortogonalnost ravni

Na sličan način, kao što se u ravni definišu pojmovi ugaone linije i ugla, u prostoru definišemo diedarsku površ i diedar:

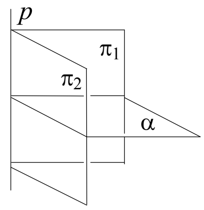
Definicija. *Diedarska površ* $\pi_1 p \pi_2$ je unija dve poluravni $p\pi_1$ i $p\pi_2$ sa zajedničkom početnom pravom p. Prava p se naziva *ivica*, a poluravni $p\pi_1$ i $p\pi_2$ *strane* te diedarske površi.

Može se dokazati (dokaz nije jednostavan) da svaka diedarska površ $\pi_1 p \pi_2$ ($p\pi_1 \neq p\pi_2$) deli prostor na dva disjunktna skupa, koji se nazivaju *diedarske oblasti*.

Definicija. Unija diedarske površi i jedne od diedarskih oblasti, koje su određene tom diedarskom površi, naziva se *diedar*.

Analogno situaciji u ravni - kako jedna ugaona linija određuje dva ugla, tako i jedna diedarska površ određuje dva diedra. I ostali pojmovi su povezani, pa se tako definišu *opruženi diedri*, *susedni diedri*, *unakrsni diedri* itd...

Od posebnog značaja je pojam nagibnog ugla diedra:



Definicija. Ugao, po kome neka ravan α, upravna na ivici p diedra $\pi_1 p \pi_2$, seče taj diedar, naziva se *nagibni ugao diedra* ili kraće *ugao diedra*.

Može se dokazati, a to je potrebno zbog korektnosti definicije, da nagibni ugao diedra ne zavisi od izbora ravni α.

Dokazuje se da su diedri podudarni ako i samo ako su im podudarni nagibni uglovi.

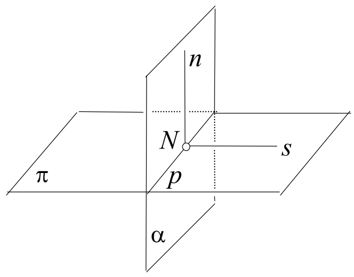
Takođe, može se uvesti relacija ">" između diedara, pa se za jedan diedar kaže da je *veći* od drugog, ako mu je veći nagibni ugao.

Za konveksni diedar se kaže da je *oštar*, *prav* ili *tup* u zavisnosti da li mu je nagibni ugao oštar, prav ili tup. Ovi pojmovi omogućuju da se definiše relacija ortogonalnosti ravni.

Definicija. Neka se ravni α i β seku po pravoj p. Ugao manjeg od diedara, koje te ravni određuju, naziva se *ugao između tih ravni*. U specijalnom slučaju, kada je taj ugao prav, kažemo da je ravan α *normalna* na ravni β u oznaci $\alpha \perp \beta$.

Od posebnog značaja je sledeća teorema:

Teorema 1. Ako je prava n normalna na ravni π, svaka ravan α, koja sadrži pravu n, normalna je na ravni π.



Dokaz: Neka je a $\pi\cap\alpha=p$. Kako je $n\perp\pi$, to je prava n upravna na pravoj p u nekoj tački N. Označimo sa s pravu ravni π upravnu na pravoj p u tački N. Kako je $p\perp n$ i $p\perp s$, prava p je upravna i na ravni određenoj pravama n i s, dakle $\angle nNs$ je nagibni ugao diedra $\alpha p\pi$. Iz $n\perp\pi$ sledi $n\perp s$, pa je nagibni ugao prav i po prethodnoj definiciji ravan α je upravna na ravni π. ❑

Zadaci

1. Neka je $\beta\perp\alpha$ i $A\in\beta$. Ako je n prava koja sadrži tačku A i upravna je na ravni α, dokazati da $n\subset\beta$.
2. Ako je jedna ravan upravna na dvema ravnima, koje se seku, dokazati da je ta ravan upravna i na presečnoj pravoj ovih ravni.
3. Ako je ravan π normalna na presečnoj pravoj ravni α i β, dokazati da je $\pi\perp\alpha$ i $\pi\perp\beta$.
4. Ako su iz tačke P u unutrašnjosti diedra konstruisane normale na strane diedra, one tada određuju ugao suplementan nagibnom uglu diedra. Dokazati.
5. Da li je je tačno tvrđenje: Ako je $\alpha\perp\pi$ i $\beta\perp\pi$, tada je $\alpha\|\beta$.

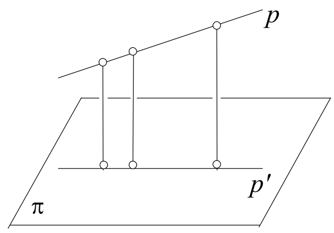
5.7 Ugao prave prema ravni. Ugao dveju mimoilaznih pravih.

Upoznaćemo najpre pojam ortogonalne projekcije neke figure na neku ravan.

Definicija. *Ortogonalna (normalna) projekcija* neke tačke na neku ravan je podnožje normale, koja sadrži tu tačku, na tu ravan. Skup ortogonalnih projekcija svih tačaka neke figure na neku ravan naziva se *ortogonalna (normalna) projekcija te figure* na tu ravan.

Teorema 1. Ortogonalna projekcija prave p na neku ravan π, na koju nije normalna, je prava p'.

Dokaz: Neka je α ravan određena pravom p i tačkom A' (ortogonalnom projekcijom tačke A prave p na ravan π) Kako ravan α sadrži pravu AA', upravnu na π, to je, po teoremi iz prethodnog odeljka $\alpha\perp\pi$. Ali tada ravan α sadrži i sve prave XX'; gde $X\in p$ (videti zadatak 1, iz prethodnog odeljka). Ako sa p' označimo $\pi\cap\alpha$, na osnovu prethodnog zaključujemo da je svaka tačka ortogonalne projekcije prave p na ravan π na pravoj p'. Na sličan način zaključujemo i da je svaka tačka prave p' ortogonalna projekcija neke tačke prave p na ravan π. Dakle, tražena ortogonalna projekcija je zaista prava p'. ❑



Definicija. Oštar ugao koji prava p obrazuje sa svojom ortogonalnom projekcijom p' u ravni π naziva se *ugao prave p prema ravni* π. Specijalno u slučaju kada je $p\perp\pi$, taj ugao je prav.

Dve mimoilazne prave nemaju zajedničkih tačaka, pa i ne određuju nijedan ugao. Međutim, može se definisati ugao dveju mimoilaznih pravih. Posebno će biti značajan slučaj kada je taj ugao prav.

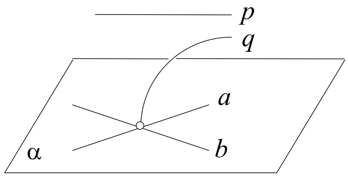
Definicija. *Ugao dveju mimoilaznih pravih* je ugao koji određuju njima paralelne prave p_1 i q_1, koje se seku u nekoj tački S.

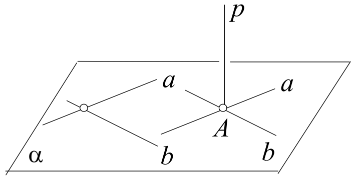
Može se dokazati da taj ugao ne zavisi od izbora tačke S.

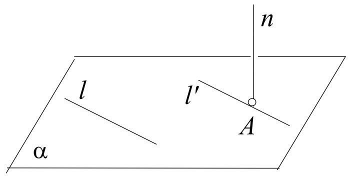
Korišćenjem ovog pojma, možemo uopštiti neka, od ranije poznata, tvrđenja.

Teorema 2. Neka je p prava upravna na dve prave a i b, ravni α, koje se seku. Tada je $p\perp\alpha$.

Dokaz: Dokažimo najpre da ne može biti $p\|\alpha$. Neka je q prava koja sadrži presečnu tačku pravih a i b, i paralelna je sa pravom p. U tom slučaju iz relacija $p\|q$ i $a\|a$, na osnovu definicije ugla mimoilaznih pravih, sledi da je $q\perp a$. Na isti način se dokazuje i da je $q\perp b$. Tada je na osnovu Košijeve teoreme $q\perp\alpha$. Dakle, ne može biti $p\|\alpha$ jer bi u tom slučaju bilo i $q\|\alpha$.







Neka je $p \cap \alpha = \{A\}$. i neka su a' i b' prave ravni α, koje sadrže tačku A i paralelne su redom sa pravama a i b. Kako je $p \perp a$ i $p \perp b$, to je, po definiciji ugla mimoilaznih pravih, $p \perp a'$ i $p \perp b'$, odnosno po Košijevoj teoremi $p \perp \alpha$. ❑

Teorema 3. Ako je prava n upravna na ravni α, tada je n upravna na svim pravama ravni α.

Dokaz: Neka je l prava ravni α i neka je $n \cap \alpha = \{A\}$. Ako $A \in l$ tvrđenje sledi neposredno. Pretpostavimo sada da $A \notin l$. Neka je l' prava ravni α koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj l. Tada je $n \perp l'$, pa je i $n \perp l$. ❑

Zadaci

1. Dokazati da postoji tačno jedna prava koja seče svaku od dve date mimoilazne prave pod pravim uglom (tzv. *zajednička normala mimoilaznih pravih*).
2. Ugao prave prema ravni, na koju nije upravna, manji je od ugla koji ova prava obrazuje sa ma kojom drugom pravom te ravni. Dokazati.
3. Ako su dve prave paralelne, onda su i njihove projekcije na istu ravan takođe paralelne. Dokazati.
4. Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke takve da je $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, $AC \perp BD$. Ako je $\angle BAC$ prav ugao, dokazati da su i uglovi CAD i BAD pravi.

Razni zadaci (normalnost pravih i ravni)

1. Ako su dve ravni upravne na istoj pravoj, one su među sobom paralelne. Dokazati.
2. Ako je prava n upravna na jednoj od dveju paralelnih ravni, upravna je i na drugoj. Dokazati.
3. Ako je prava AA' upravna na ravan α ($A'\in\alpha$), i B proizvoljna tačka te ravni, dokazati da je $AA'<AB$.
4. Neka se prave m i n seku. Ako je $m\perp n$ i n paralelna sa nekom ravni α, da li je $m\|\alpha$?
5. Odrediti geometrijsko mesto tačaka u ravni π čija su odstojanja od date tačke $P\notin\pi$ među sobom jednaka.
6. Tri nekolinearne poluprave OA, OB, OC ravni p imaju zajedničku početnu tačku O. Ako poluprava OP gradi sa svakom od polupravih OA, OB, OC podudarne uglove dokazati da je $OP\perp\pi$.
7. Neka je ABC jednakokrakopravougli trougao ravni α sa pravim uglom kod temena A. Ako je a prava takva da $A\in a$, $a\perp\alpha$ i M proizvoljna tačka prave a, odrediti geometrijsko mesto tačaka:
   (i) težišta trouglova BMC;
   (ii) podnožja visina BB' i CC' trouglova BMC;
   (iii) ortocentara trouglova BMC.
8. Neka su A i B sa iste strane ravni α. Odrediti u ravni α tačku M tako da je zbir duži AM i MB najmanji.
9. Neka se dve među sobom upravne ravni α i β seku po pravoj s. Dokazati da je svaka prava ravni β koja je upravna na pravoj s, upravna i na ravni α.
10. Ako je za neke ravni α, β, γ: $\alpha\|\beta$ i $\beta\perp\gamma$, dokazati da je $\alpha\perp\gamma$.
11. Neka su prave a, b, c upravne na pravoj p u istoj tački N. Dokazati da su prave a, b, c komplanarne.
12. Neka je PQ zajednička normala dveju mimoilaznih pravih p i q ($P\in p$, $Q\in q$). Ako prava c seče prave p i q redom u tačkama A i B, takvim da je $AP\cong BQ$, Dokazati da je $\angle PAB\cong\angle QBA$.

13. Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke takve da je prava AD upravna na ravni određenoj tačkama B, C, D. Ako je DE visina trougla DBC, dokazati da je ravan određena tačkama A, D, E upravna na ravan određenu tačkama A, B, C.

14. Neka su A, B, C, D četiri nekomplanarne tačke takve da je prava AD upravna na ravni određenoj tačkama B, C, D. Ako je BF visina trougla ABC i BK visina trougla DBC, dokazati da je ravan određena tačkama B, F, K upravna na ravan određenu tačkama A, B, C.

15. Neka su α i β dve ravni i p i q dve prave takve da je $p\perp\alpha$ i $q\perp\beta$. Dokazati ekvivalenciju: $\alpha\|\beta \Leftrightarrow p\|q$

16. Neka su p i q mimoilazne, među sobom upravne prave. Ako je ravan α upravna na pravoj p, dokazati da je $q\|\alpha$.

17. Neka su M, N, P, Q tačke ravni α takve da je $MN\cap PQ=\{S\}$ i $MS\cong NS$ i $PS\cong QS$. Neka je A tačka van ravni α takva da je $AM\cong AN$ i $AP\cong AQ$. Dokazati da je $AS\perp\alpha$.

Glava VI

Konstrukcija ravnih figura

Konstruktivni zadaci u geometriji su posebna vrsta zadataka, koji zahtevaju naročitu preciznost i podrazumevaju određenu formu rešavanja. U zadatku se zahteva da se primenom *lenjira* i *šestara* tj. koristeći neke *osnovne konstrukcije*, *konstruišu* određene geometrijske figure (trougao, četvorougao, krug, prava, tačka,...) koje zadovoljavaju postavljene zahteve. Ti zahtevi mogu biti različiti, bilo da neka duž ili ugao treba da budu podudarni datoj duži ili uglu, bilo da tražena figura bude u nekom karakterističnom položaju prema nekim datim figurama.

Važno je istaći da se ovde ne radi o crtanju, već konstrukciji koja predstavlja niz koraka od kojih je svaki neka osnovna konstrukcija. Osim toga, u zadatku je potrebno da se obrazloži kako se konstrukcija može izvesti, dokaže tačnost rešenja i diskutuje broj rešenja. Zadatak se smatra rešenim, ako je ukazano na način konstrukcije figure i ako je dokazano da se kao rezultat naznačenih konstrukcija dobija baš figura koja zadovoljava sve postavljene uslove.

Osnovne konstrukcije, delimo u dve grupe. Prve zovemo: osnovne konstrukcije koje se mogu *realizovati lenjirom*, a druge: osnovne konstrukcije koje se mogu *realizovati šestarom*.

- Osnovne konstrukcije koje se mogu realizovati lenjirom su:
    1. *konstrukcija prave koja sadrži dve date tačke;*
    2. *konstrukcija poluprave sa datom početnom i još jednom svojom tačkom;*
    3. *konstrukcija duži čije su krajnje tačke dve date tačke.*
- Osnovne konstrukcije koje se mogu realizovati šestarom su:

4. *konstrukcija kruga čiji je centar data tačka i poluprečnik data duž;*
5. *konstrukcija kružnog luka kome su centar, dve krajnje tačke i jedna tačka, četiri date tačke.*

Koristeći samo prvu grupu osnovnih konstrukcija ne mogu se izvršiti sve konstrukcije koje se mogu dobiti primenom obe grupe. Primer za to je konstrukcija središta date duži. U tom slučaju kažemo da nije moguća konstrukcija središta duži samo pomoću lenjira. Ali ima konstruktivnih zadataka koji se ne mogu rešiti ni primenom obe grupe osnovnih konstrukcija. Najpoznatiji među njima su problem *trisekcije ugla* i problem *kvadrature kruga*. Prvi glasi: konstruisati dve poluprave koje dati ugao dele na tri podudarna, a drugi: konstruisati kvadrat jednake površine kao dati krug[29]. U oba slučaja kažemo da zadatak nije moguće rešiti primenom lenjira i šestara. Osim ovih, postoji još mnogo sličnih problema za koje je dokazano da se ne mogu rešiti samo pomoću lenjira i šestara[30].

Pri rešavanju zadataka nećemo konstrukciju uvek svoditi na osnovne, već ćemo koristiti neke jednostavne iz njih izvedene. Te najjednostavnije konstrukcije, izvedene iz osnovnih, nazivaju se *elementarne konstrukcije*. U toku rada njih ćemo smatrati poznatim i nećemo ih objašnjavati niti dokazivati njihovu ispravnost. Navedimo sledeće elementarne konstrukcije:

∗ konstrukcija medijatrise duži;
∗ konstrukcija bisektrise ugla;
∗ konstrukcija paralelnih pravih (polupravih, duži);

---

[29] Ovi problemi javlili su se još u Staroj Grčkoj. Osim njih tada je postavljen i tzv. *problem udvostručenja kocke*: konstruisati ivicu kocke čija je zapremina dva puta veća od kocke date ivice. Nemogućnost konstrukcije samo pomoću lenjira i šestara, za sva tri prethodna problema, dokazana je u *XIX* veku, nakon razvitka *teorije grupa* koju je otkrio francuski matemetičar *E. Galoa* (1811-1832). Dokaz, za problem udvostručenja kocke, izveo je francuski matematičar *P. L. Vancel* (1814-1848), 1837. g.

[30] Čuveni nemački matematičar *C. F. Gaus* (1777-1855) je 1796. g. dokazao, da je pravilan n-tougao moguće konstruisati pomoću lenjira i šestara ako i samo ako je $n=2^k \cdot p$, gde je p ili 1 ili prost broj koji se može napisati u obliku $2^{2^l}+1$, za $l = 0, 1, 2, \dots$ (*Fermaovi brojevi*). Dakle, pravilan n-tougao je moguće konstruisati pomoću lenjira i šestara za $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 17, \dots$, a nije moguće konstruisati za $n = 7, 9, 11, 13, 14, 15, 18, 19, \dots$. Inače, Fermaovi brojevi nisu svi prosti (npr. za l=5).

* konstrukcija normalnih pravih (polupravih, duži);
* konstrukcija duži podudarne datoj duži;
* konstrukcija ugla podudarnog datom uglu;
* konstrukcija središta duži;
* konstrukcija tangente datog kruga iz date tačke;
* konstrukcija trougla čije su ivice podudarne trima datim dužima;
* konstrukcija trougla kome su odgovarajuća ivica i dva ugla podudarni datoj duži i datim uglovima;
* konstrukcija trougla kome su dve ivice i njima zahvaćeni ugao podudarni datim dužima i datom uglu;
* konstrukcija trougla kome su dve ivice i ugao naspram jedne od njih podudarni datim dužima i datom uglu, pri čemu je poznato da je ugao naspram druge ivice oštar, prav ili tup;
* konstrukcija geometrijskog mesta tačaka iz kojih se data duž vidi pod datim uglom.

Rešavanje konstruktivnog zadatka (konstruisati figuru Φ koja zadovoljava uslove $\mathcal{A}$) sastoji se iz četiri etape:

(I) ***Analiza*** je razmatranje mogućnosti da se dođe do rešenja. U ovoj etapi pretpostavljamo da je zadatak rešen tj. da figura Φ zadovoljava uslove $\mathcal{A}$. Zatim razmatramo odnose između datih i traženih elemenata i dolazimo do uslova $\mathcal{B}$ koje figura Φ zadovoljava, a pomoću kojih se Φ može lakše konstruisati. Na kraju dokazujemo $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$.

(II) ***Konstrukcija*** se sastoji od toga da se polazeći od zadatih elemenata, primenom konačnog broja osnovnih i elementarnih konstrukcija, dođe do tražene figure Φ, tako da zadovoljava uslove $\mathcal{B}$. Pri tome je obavezno da se svaki od koraka opiše.

(III) ***Dokaz*** je etapa u kojoj treba dokazati da ovako konstruisana figura Φ zadovoljava uslove zadatka tj. uslove $\mathcal{A}$. Zapravo dokazujemo $\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A}$. Pri tome su neki delovi dokaza neposredni, pa kažemo da je taj deo ispravan "po konstrukciji".

(IV) ***Diskusija*** se sastoji u ispitivanju egzistencije i broja rešenja u zavisnosti od datih uslova $\mathcal{A}$.

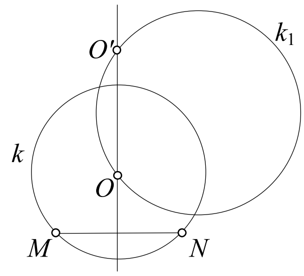
Na kraju napomenimo da se u ovoj glavi izvode konstrukcije primenom podudarnosti. U narednim glavama rešavaćemo konstruktivne zadatke primenom drugih metoda (primenom izometrije, homotetije, sličnosti, itd.). Takođe, na sličan način se mogu rešavati i konstruktivni zadaci u prostoru.

Ceo tok rešavanja konstruktivnih zadataka pokazaćemo na nekoliko primera:

Primer 1. Konstruisati krug k koji sadrži dve date tačke M i N i čiji centar pripada datom krugu $k_1(O_1,r_1)$.

Rešenje:

Analiza. Centar traženog kruga je jednako udaljen od tačaka M i N, pa tačka O pripada medijatrisi duži MN i biće presek te medijatrise i kruga k_1.



Konstrukcija. Konstruišimo medijatrisu duži MN. Ona seče krug k_1 u nekoj tački O. Konstruišimo krug k sa centrom O koji sadrži tačku M. Dokažimo da je k traženi krug.

Dokaz. Treba dokazati da:

(1) krug sadrži tačke M i N;

(2) centar kruga k pripada krugu k_1.

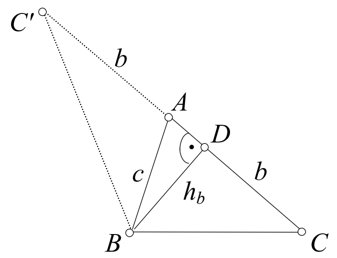
(1) Krug k sadrži tačku M po konstrukciji, a tačku N jer je $ON \cong OM$ (tačka O pripada medijatrisi duži MN, pa je jednako udaljena od njenih krajnjih tačaka).

(2) Centar kruga k, tačka O, pripada krugu k_1 po konstrukciji.

Diskusija. Zadatak ima dva, jedno ili nijedno rešenje u zavisnosti od toga da li konstruisana medijatrisa seče, dodiruje ili nema zajedničkih tačaka sa krugom k_1.

Primer 2. Konstruisati trougao ABC kome su ivice AB, AC i visina iz temena B podudarni trima datim dužima c, b, h_b.

Rešenje:



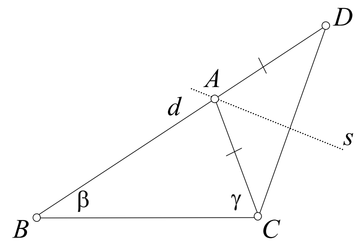
Analiza. Neka je D podnožje visine iz temena B. U pravouglom trouglu ABD poznate su hipotenuza $AB \cong c$ i kateta $BD \cong h_b$; prema tome, taj trougao se može konstruisati. Treće teme traženog trougla pripada pravoj AD.

Konstrukcija. Konstruišimo najpre trougao ADB ($AB \cong c$, $\angle ADB = 90^{\circ}$, $BD \cong h_b$). Na pravoj AD odredimo, zatim tačku C tako da je $AC \cong b$. Dokažimo da je ABC traženi trougao.

Dokaz. U dobijenom trouglu je $AB \cong c$ i $AC \cong b$, po konstrukciji. Kako je $\angle ADB = 90^{\circ}$, to je duž BD visina trougla, a ona je podudarna duži h_b po konstrukciji.

Diskusija. Rešenje zadatka je moguće ako i samo ako je moguće konstruisati trougao ABD, tj. ako je $h_b \leq c$. Prilikom konstrukcije tačke C, postoje dve mogućnosti - sa raznih strana tačke A, dakle, dobijaju se dva rešenja. U slučaju kad je $h_b \cong c$ ta dva trougla su pravougli i podudarni.

> ***Primer 3.*** Konstruisati trougao ABC ako su unutrašnji uglovi kod temena B, C podudarni datim uglovima β i γ , a zbir ivica AB i AC podudaran datoj duži d.



Napomena: Ubuduće ćemo ovakav zadatak, konstrukcije trougla iskazivati u obliku: konstruisati trougao ABC ako je dato:

$$\beta,\ \gamma,\ b+c.$$

Rešenje:

Analiza. Neka je D tačka prave takva da je $AD \cong AC$ i $\mathcal{B}(B,A,D)$. Tada je $BD = BA + AD = BA + AC = d$, pa je $BD \cong d$. Kako je trougao ADC jednakokraki, to je $\angle ADC \cong \angle ACD = \frac{1}{2}\angle BAC = 90^{0} - \frac{\beta+\gamma}{2}$. Dakle, može se konstruisati trougao BCD.

Konstrukcija. Konstruišimo trougao BCD ($BD \cong d$, $\angle CBD \cong \beta$, $\angle BCD = 90^{\circ} - \frac{\beta+\gamma}{2}$). Medijatrisa s duži DC seče pravu BD u tački A. Dokažimo da je ABC traženi trougao.

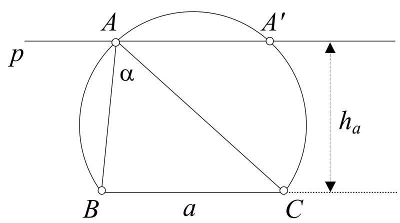
Dokaz. Medijatrisa ivice DC sadrži teme A trougla ACD; dakle taj trougao je jednakokraki. Odatle zaključujemo da je: $AB+AC=AB+AD=BD$, a $BD\cong d$, po konstrukciji. Takođe, sledi i da je $\angle ADC\cong\angle ACD$, pa je $\angle ACB=180^o-\beta-2\angle ADC=180^o-\beta-2(90^o-\frac{\beta+\gamma}{2})=\gamma$. Najzad je $\angle ABC\cong\beta$, po konstrukciji.

Diskusija. Neophodno je da bude $\beta+\gamma<180^o$. U protivnom nema rešenja. Inače, rešenje je jedinstveno. Napominjemo da važi i $\beta+90^o-\frac{\beta+\gamma}{2}<180^o$ (ovaj uslov se svodi na $\beta-\gamma<180^o$ i uvek važi jer je $\beta+\gamma<180^o$) tako da se ΔDBC može konstruisati.

Primer 4. Konstruisati trougao ABC ako je dato: a, α, h_a.

Rešenje:

Analiza. Tačka A pripada geometrijskom mestu tačaka iz kojih se duž BC vidi pod uglom α, a isto tako i pravoj paralelnoj pravoj BC na odstojanju h_a. Znači, teme A je presek prave i odgovarajućeg kružnog luka.



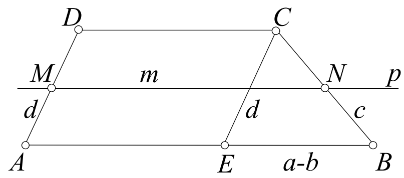
Konstrukcija. Konstruišimo geometrijsko mesto tačaka iz kojih se duž $BC\cong a$ vidi pod uglom α. (videti odeljak 5.2.) i pravu $p\|BC$ na odstojanju h_a. Sa A označimo presek prave i pomenutog geometrijskog mesta tačaka. Dokažimo da je ABC traženi trougao.

Dokaz. $BC\cong a$, po konstrukciji. Tačka A, po konstrukciji, pripada odgovarajućem geometrijskom mestu tačaka iz kojih se duž BC vidi pod uglom α, pa je $\angle BAC\cong\alpha$. Visina trougla ABC iz temena A podudarna je duži h_a, jer tačka A pripada pravoj koja je na odstojanju h_a paralelna sa BC.

Diskusija. Neophodno je da bude $\alpha<180^o$. Broj rešenja zadatka jednak je broju presečnih tačaka prave p i kružnog luka (pomenutog geometrijskog mesta tačaka).

Primer 5. Konstruisati trapez $ABCD$ ako su kraci BC, AD, srednja linija i razlika osnovica AB i CD podudarni četirima datim dužima c, d, m, a-b.

Rešenje:



Analiza. Neka je E presečna tačka prave AB sa pravom koja je u tački C paralelna sa pravom AD. Tada je četvorougao $AECD$ paralelogram, pa je $CE \cong AD \cong d$; $EB=AB-CD=a-b$. Dakle, trougao EBC se može konstruisati.

Konstrukcija. Konstruišimo trougao EBC ($BC \cong c$, $EC \cong d$, $EB \cong a-b$). Neka je N središte duži BC. Konstruišimo pravu p, $p \ni N$ i $p \| EB$. Odredimo tačku M tako da $M \in p$, $MN \cong m$ i tačka M je sa one strane prave BC sa koje je i tačka E. Konstruišimo zatim pravu q, $q \ni C$ i $q \| p$ i $r \ni M$ i $r \| EC$. Prava r seče pravu EB u tački A, a pravu q u tački D. Dokažimo da je četvorougao $ABCD$ traženi trapez.

Dokaz. Četvorougao $ABCD$ je trapez, jer je $q \| EB$ po konstrukciji; $BC \cong c$, takođe po konstrukciji. Četvorougao $AECD$ je paralelogram, pa je $AD \cong EC \cong d$; duž MN je srednja linija trapeza, jer je N središte duži BC i $MN \| AB$ a $MN \cong m$, po konstrukciji.

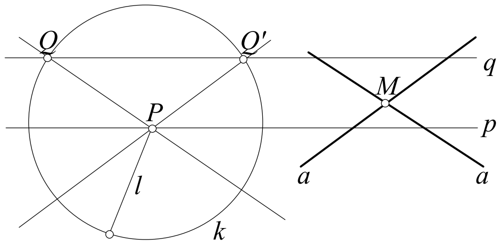
Diskusija. Da bi rešenje postojalo, potrebno je i dovoljno da bude:

$$|c-d|<a-b<c+d \ \text{ i } \ m>\frac{a-b}{2}.$$

Primer 6. Neka su: l duž, p i q paralelne prave i M tačka van njih. Konstruisati pravu koja sadrži tačku M tako da ona seče prave p i q u tačkama koje određuju duž podudarnu duži l.

Rešenje:

Analiza. Neka su P, Q i Q' tačke pravih p, odnosno q, takve da je $PQ \cong PQ' \cong l$. Tada je tražena prava paralelna pravoj PQ ili PQ', jer je jedan od odgovarajućih četvorouglova paralelogram.



Konstrukcija. Neka je P proizvoljna tačka prave p. Konstruišimo krug $k(P,l)$. Neka je Q jedna od presečnih tačaka tog kruga sa pravom q. Konstruišimo pravu a, $a \ni M$ i $a \| PQ$. Dokažimo da je a tražena prava.

Dokaz. Kako je $p \| q$ i $PQ \| a$ četvorougao određen pravama p, q, a, PQ je paralelogram, pa je odsečak prave a između pravih p i q podudaran duži l.

Diskusija. Broj rešenja jednak je broju presečnih tačaka kruga k i prave q. Označimo sa d odstojanje pravih paralelnih p i q. Ako je $d<l$, postoje dva rešenja; ako je $d=l$ postoji jedno rešenje; ako je $d>l$ zadatak nema rešenja.

Zadaci

Uobičajene oznake za elemente trougla ABC su:

- a, b, c - ivice;
- α, β, γ - odgovarajući uglovi;
- h_a, h_b, h_c - visine;
- t_a, t_b, t_c - težišne duži;
- l_a, l_b, l_c - odsečci bisektrisa unutrašnjih uglova (duži određene temenima i presecima bisektrisa sa naspramnim ivicama);
- s - poluobim;
- R, r, r_a, r_b, r_c - poluprečnici opisanog, upisanog i spolja upisanih krugova.

1. Konstruisati trougao ABC ako je dato:

   (*i*) α, β, s; (*ii*) $a-b, c, \gamma$; (*iii*) $a, \alpha, b+c$; (*iv*) $a, \beta-\gamma, b-c$;
   (*v*) $a, \beta-\gamma, b+c$; (*vi*) b, c, h_a; (*vii*) b, h_a, h_b; (*viii*) α, h_b, h_c;

(ix) h_a, α, β; (x) b, a+c, h_c; (xi) b-c, h_b, α; (xii) a, t_b, t_c;
($xiii$) b, c, t_a; (xiv) t_a, t_b, t_c; (xv) c, h_a, l_a; (xvi) c, h_a, t_b;
($xvii$) b, l_a, α; ($xviii$) h_a, h_b, t_a; (xix) t_a, h_b, b+c; (xx) a, b, β-γ.

2. Konstruisati jednakokraki trougao ABC ako je dato:
   (i) osnovica i zbir kraka i visine koja odgovara osnovici;
   (ii) obim i visina koja odgovara osnovici;
   (iii) visine;
   (iv) ugao na osnovici i odsečak njegove bisektrise;
   (v) krak AC i na njemu tačka B' podnožje visine iz temena B;
   (vi) krak i visina koja mu odgovara.

3. Konstruisati pravougli trougao ABC ($\angle C$=90^o) ako je dato:
   (i) α, a+b; (ii) α, a-b; (iii) a, b+c; (iv) c, a+b; (v) t_a, t_c;
   (vi) a, c-b; (vii) a+h_c, α; ($viii$) t_c, h_c; (ix) a, t_a.

4. Konstruisati pravougaonik ako je dato:
   (i) dijagonala i razlika susednih ivica;
   (ii) dijagonala i obim;
   (iii) obim i ugao između dijagonala.

5. Konstruisati romb ako je dato:
   (i) ivica i zbir dijagonala;
   (ii) ugao i zbir dijagonala;
   (iii) ugao i razlika dijagonala.

6. Konstruisati paralelogram $ABCD$ ako je dato:
   (i) ivica i obe visine;
   (ii) dijagonala i obe visine;
   (iii) ivica AB, ugao kod temena A i zbir BC+AC.

7. Konstruisati trapez ako je dato:
   (i) sve četiri ivice;
   (ii) osnovice i dijagonale;
   (iii) obe osnovice i uglovi na manjoj osnovici;
   (iv) zbir osnovica, visina i uglovi na većoj osnovici.

8. Konstruisati deltoid $ABCD$ ako su dati: dijagonala AC (koja je osa simetrije deltoida), ugao između nje i ivice AD i zbir dve nejednake ivice $AD+DC$.

9. Konstruisati četvorougao $ABCD$ ako je dato:

   (*i*) sve četiri ivice i ugao između dve naspramne ivice;

   (*ii*) tri ivice i uglovi nalegli na četvrtoj ivici;

   (*iii*) središta triju ivica i jedna duž paralelna i podudarna četvrtoj ivici.

10. Konstruisati trougao ABC ako je dato:

   (*i*) a, α, r; (*ii*) a, α, r_a; (*iii*) a, h_b, h_c;

   (*iv*) α, h_a, s; (*v*) h_a, l_a, r; (*vi*) α, l_a, h_a;

   (*vii*) α, β, R; (*viii*) a, R, r; (*ix*) a, h_b, R.

11. Konstruisati krug tako da:

   (*i*) dodiruje dve date neparalelne prave p i q, dodirna tetiva podudarna je datoj duži t;

   (*ii*) centar tog kruga bude data tačka, a na datoj pravoj odseca tetivu podudarnu datoj duži t;

   (*iii*) sadrži dve date tačke, a centar mu pripada datom krugu k_1;

   (*iv*) ima dati poluprečnik r i dodiruje dva data kruga - jedan spolja a jedan iznutra.

12. Koristeći samo lenjir, konstruisati normalu iz date tačke M, koja ne pripada datom krugu k, na dati prečnik tog kruga (ili na pravu njime određenu).

13. Dat je kvadrat $ABCD$. Na ivicama BC i CD date su tačke M i N takve da je $\angle MAN=45^\circ$. Koristeći samo lenjir, konstruisati normalu iz tačke A na pravu MN.

14. Konstruisati kvadrat $ABCD$ ako je dato teme B i dve tačke, E i F, koje pripadaju ivicama AD i DC ili pravama njima određenim.

15. Data je prava CD i dve tačke A i B van te prave. Konstruisati na pravoj CD tačku M takvu da je $\angle AMC=2\angle BMD$.

16. Konstruisati trougao ako su centri opisanog, upisanog i spolja upisanog kruga tog trougla tri date tačke.

17. Konstruisati trougao ABC ako su teme A, ortocentar H i centar opisanog kruga O, tog trougla tri date tačke.

18. Na pravoj određenoj ivicom AB pravougaonika $ABCD$ odrediti takvu tačku E iz koje se ivice AD i DC vide pod jednakim uglovima. Kada zadatak ima rešenja?

19. U dati krug upisati trougao ABC ako su dati: teme A, pravac visine AA' i tačka preseka prave određene visinom BB' sa tim krugom.

20. U konveksnom četvorouglu $ABCD$ važi $BC \cong CD$. Date su ivice AB i AD i uglovi kod temena B i D. Konstruisati četvorougao.

21. Konstruisati pravilan trougao ABC, ako je njegova ivica podudarna datoj duži a i ako dve ivice AB i AC i bisektrisa unutrašnjeg ugla AE (ili prave njima određene), sadrže redom tri date kolinearne tačke M, N, P.

22. Konstruisati trougao ABC ako je dato:
    (*i*) h_a, l_a, t_a; (*ii*) R, β-γ, t_a; (*iii*) R, β-γ, h_a; (*iv*) a, α, β-γ.

23. Konstruisati trougao ABC ako je dato:
    (*i*) temena B i C i prava kojoj pripada bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A;
    (*ii*) tačke A, O, E, gde je O centar opisanog kruga, a E presek ivice BC sa bisektrisom unutrašnjeg ugla kod temena A;
    (*iii*) tačke M, N, P u kojima prave određene visinom h_a, bisektrisom l_a i težišnom duži t_a, seku krug opisan oko tog trougla;
    (*iv*) jedno teme i centri upisanog i opisanog kruga;
    (*v*) tačke A, O, N, gde je O centar opisanog kruga, N presek tog kruga sa bisektrisom unutrašnjeg ugla kod temena A i ivica BC podudarna datoj duži a.

24. Konstruisati kvadrat $ABCD$, ako su date tačke P, Q, R, S koje pripadaju ivicama AB, BC, CD, DA tog kvadrata.

25. Konstruisati trougao ABC ako su date ivice a i b i važi:
    $\angle CAB = 3\angle ABC$.

26. Kroz tačku M unutar datog kruga konstruisati tetivu, tako da razlika njenih odsečaka bude jednaka datoj duži a.

27. Neka je A tačka kruga k. Koristeći samo šestar, konstruisati kvadrat $ABCD$ upisan u dati krug[31].

28. Konstruisati zajedničke tangente data dva kruga.

29. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke. Konstruisati tačku D, takvu da je četvorougao $ABCD$ tetivni i tangentni.

30. Konstruisati trougao ABC ako je dato:

(*i*) b-c, r, r_a; (*ii*) a, b-c, r; (*iii*) a, r, r_a; (*iv*) b-c, r, h_b;

(*v*) a, b+c, r; (*vi*) a, r_b+r_c, h_a; (*vii*) b+c, r_b, r_c; (*viii*) α, b+c, r;

(*ix*) R, r, r_a; (*x*) R, r_b, r_c; (*xi*) b, R, r+r_a; (*xii*) a, h_a, r_a-r.

31. Neka je AB data duž. Koristeći samo lenjir, uz mogućnost konstrukcije paralelnih pravih (*konstrukcije u afinoj geometriji*), konstruisati tačku C, tako da je:

(*i*) $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$; (*ii*) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

[31] Konstrukcije samo pomoću šestara, proučavali su italijanski matematičar *L. Maskeroni* (1750-1800) i, još sto godina pre njega, danski matematičar *G. Mor* (1640-1697) u svojoj knjizi *"Danski Euklid"* iz 1672. g. Teorijsku osnovu ovih konstrukcija dao je austrijski matematičar *A. Adler*, koji je 1890. g. dokazao da svaki zadatak koji se može rešiti pomoću lenjira i šestara, može biti rešen i samo pomoću šestara.

Glava VII

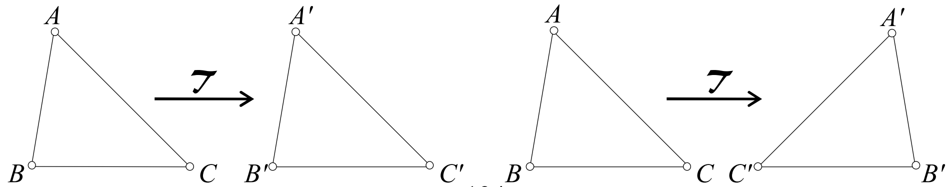
Izometrijske transformacije ravni. Klasifikacija

U trećoj glavi uveli smo izometrijske transformacije kao bijektivna preslikavanja koja čuvaju relaciju podudarnosti parova tačaka. Tada su nam one bila potrebne zbog definisanja relacije podudarnosti figura uopšte. Sada ćemo detaljnije izučiti izometrije euklidske ravni, njihova svojstva, uvesti specijalne vrste izometrija i na kraju izvršiti njihovu klasifikaciju.

7.1 Direktne i indirektne izometrijske transformacije

U trećoj glavi dokazali smo, da izometrija ravni koja nije koincidencija ne može imati tri fiksne nekolinearne tačke. Istakli smo, tada, da je broj fiksnih tačaka veoma značajan za klasifikaciju izometrija. Osim toga, važnu ulogu u toj klasifikaciji ima pojam koji ćemo sada uvesti:

Definicija. Izometrijska transformacija $\mathcal{T}: E^2 \to E^2$ je *direktna* ako "čuva" orijentaciju ravni E^2 tj. svaki trougao te ravni preslikava u trougao iste orijentacije. Izometrijska transformacija je $\mathcal{T}: E^2 \to E^2$ *indirektna*



ako svaki trougao te ravni preslikava u trougao suprotne orijentacije.

Može se dokazati da je za neku izometriju dovoljno da jedan trougao preslikava u trougao iste odnosno suprotne orijentacije da bi ona bila direktna odnosno indirektna. To znači da je svaka izometrija ili direktna ili indirektna.

Kako koincidencija svaki trougao preslikava u sebe, ona je direktna izometrija.

Na osnovu definicije, jasno je, da je proizvod dve direktne izometrije takođe direktna izometrija, a proizvod jedne direktne i jedne indirektne izometrije indirektna izometrija. Kako u ravni postoje tačno dve orijentacije, to proizvod dve indirektne izometrije predstavlja direktnu izometriju.

Navedimo sada dve značajne teoreme:

Teorema 1.* Neka su AB i $A'B'$ dve podudarne duži ravni E^2. Tada postoje tačno dve izometrije te ravni koje tačke A i B preslikavaju redom u tačke A' i B', od kojih je jedna direktna a druga indirektna.

Teorema 2.* Direktna izometrija ravni E^2 sa bar dve razne fiksne tačke je koincidencija.

Teorema 2 je, zapravo, prvi korak u najavljenoj klasifikaciji izometrija. Ostaje nam još da izučimo direktne izometrije sa jednom i bez fiksnih tačaka, kao i indirektne izometrije koje nemaju nekolinearnih fiksnih tačaka.

7.2 Osna refleksija

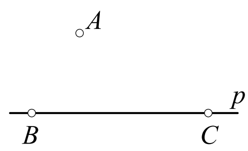
Sada ćemo se upoznati sa vrstom izometrija koja ima široku primenu u geometriji. Uvešćemo je na nešto drugačiji način, u odnosu na onaj koji smo sreli u osnovnoj školi.

Definicija. Neka je p prava ravni E^2. Izometrijska transformacija te ravni koja nije koincidencija i za koju je svaka tačka prave p fiksna naziva se *osna refleksija* (*simetrija*) te ravni u oznaci $\mathcal{S}_p$. Prava p naziva se *osa* te refleksije.

Dokažimo neka svojstva osne refleksije:

Teorema 1. Sve fiksne tačke osne refleksije su na osi te refleksije.

Dokaz: Neka je A fiksna tačka osne refleksije $\mathcal{S}_p$, sa osom p. Pretpostavimo suprotno da $A \notin p$. Neka su B i C dve proizvoljne razne tačke prave p. Na osnovu definicije su i B, C fiksne tačke te osne refleksije, pa bi ona, sa tri fiksne nekolinearne tačke, bila koincidencija (teorema 6, iz odeljka 3.1). Dakle, dolazimo do kontradikcije, pa mora biti $A \in p$. ❑



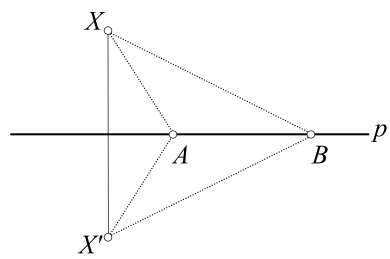
Teorema 2. Osna refleksija je indirektna izometrija.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, neka je osna refleksija direktna izometrijska transformacija. Ona ima bar dve fiksne tačke (na osi) pa bi na osnovu teoreme 2, iz prethodnog odeljka, bila koincidencija. To međutim, nije moguće pa sledi da je osna refleksija indirektna izometrija. ❑

Dokažimo sada da osna refleksija ima svojstvo, koje nam je intuitivno od ranije poznato.

Teorema 3. Ako je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija neke ravni i za neku tačku te ravni važi $\mathcal{S}_p(X)=X' \neq X$, tada je osa p te refleksije medijatrisa duži XX'.

Dokaz: Neka su A i B proizvoljne tačke ose p. Tada $\mathcal{S}_p: A,B,X \mapsto A,B,X'$. Kako je $\mathcal{S}_p$ izometrija mora biti $AX \cong AX'$ i $BX \cong BX'$ pa tačke A i B pripadaju medijatrisi duži XX'. Kako svaka duž ima jedinstvenu medijatrisu, medijatrisa duži XX' je prava AB tj. osa p. ❑



Teorema 4.* Jedine prave koje se osnom refleksijom ravni preslikavaju u sebe su osa te refleksije i sve prave te ravni koje su normalne na osu.

Intuitivno je čitaocu jasno od ranije da ako dva puta primenimo istu osnu refleksiju, svaku tačku "vraćamo" na svoje mesto. To znači da je kompozicija osne refleksije sa sobom koincidencija odnosno da je inverzna transformacija osne refleksije ista ta refleksija, što možemo zapisati u obliku: $\mathcal{S}_p^{\,2}=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{E}$; $\mathcal{S}_p^{\,-1}=\mathcal{S}_p$. Transformacije koje imaju ovo svojstvo zovu se *involutivne transformacije* ili *involucije*.

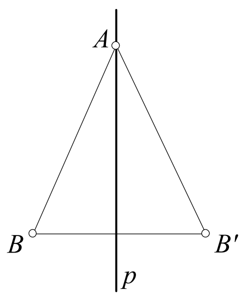
Nije teško i formalno dokazati:

Teorema 5.* Osna refleksija je involucija.

Narednom teoremom nastavljamo klasifikaciju izometrija na osnovu broja fiksnih tačaka i toga da li je izometrija direktna ili indirektna.

Teorema 6. Ako indirektna izometrija ravni ima bar jednu fiksnu tačku tada ona predstavlja osnu refleksiju čija osa sadrži tu tačku.

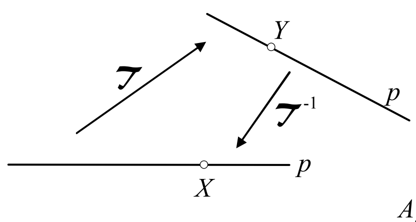
Dokaz: Neka je A fiksna tačka indirektne izometrije $\mathcal{T}$. Kako je $\mathcal{T}$ indirektna ona nije koincidencija pa postoji neka tačka B te ravni takva da je $\mathcal{T}(B)=B'\neq B$. Neka je p medijatrisa duži BB'. $\mathcal{T}$ je izometrija koja tačke A i B preslikava u tačke A i B', pa mora biti $AB\cong AB'$. Dakle, tačka A pripada medijatrisi p duži BB'. Dokažimo da izometrija $\mathcal{T}$ predstavlja osnu refleksiju sa osom p tj. da je $\mathcal{T}=\mathcal{S}_p$. Kompozicija $\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}$ je direktna izometrija sa dve fiksne tačke A i B pa prema već pomenutoj teoremi predstavlja koincidenciju. Dakle $\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}=\mathcal{E}$, pa je $\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{E}$, tj. $\mathcal{T}=\mathcal{S}_p$.

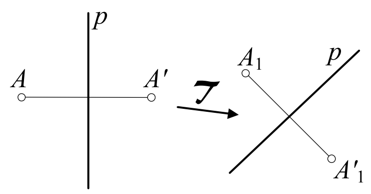


❑

Teorema 7. Neka je $\mathcal{T}$ izometrija neke ravni i p proizvoljna prava te ravni koja se tom izometrijom preslikava u pravu p'. Ako je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija te ravni sa osom p, tada je: $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.

Dokaz: Neka je Y proizvoljna tačka prave p' i $X=\mathcal{T}^{-1}(Y)$. Tada tačka X pripada pravoj p pa je $\mathcal{S}_p(X)=X$. Dakle važi: $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}^{-1}(Y)=\mathcal{T}\circ\mathcal{S}_p(X)=\mathcal{T}(X)=Y$. Izometrija $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{T}^{-1}$ je indirektna sa bar jednom fiksnom





$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \mathcal{S}\ } & A' \\ \uparrow{\scriptstyle \mathcal{T}^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}} \\ A_1 & \xrightarrow{\ \mathcal{S}_{p'}\ } & A'_1 \end{array}$$

tačkom pa, na osnovu prethodne teoreme, predstavlja osnu refleksiju. Tačka Y je proizvoljna tačka prave p', pa kako su u toj osnoj refleksiji sve tačke prave p' fiksne, osa je baš p'. ❑

Inače transformacija $\mathcal{J}\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{J}^{-1}$ naziva se *transmutacija* osne refleksije $\mathcal{S}_p$ izometrijom $\mathcal{J}$. Prethodna teorema koja je vezana za tu transmutaciju ima široku primenu. Navedimo jednu njenu posledicu:

Teorema 8.* Dve osne refleksije neke ravni komutiraju akko su im ose upravne ili jednake, tj.

$$\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q \Leftrightarrow (p\perp q \vee p=q).$$

Kompozicija dve osne refleksije biće veoma značajna u daljnjem razmatranju izometrija. Odmah možemo zaključiti da je ona, kao kompozicija dve indirektne izometrije, direktna izometrija. Ukoliko su ose tih refleksija jednake, već smo utvrdili da ta kompozicija predstavlja koincidenciju. Naravno, interesantno je pitanje šta ona predstavlja u opštem slučaju, kada su ose različite i komplanarne. Odgovor na to pitanje daćemo uskoro, ali za sada utvrdimo broj mogućih fiksnih tačaka te izometrije.

Teorema 9. Neka su p i q dve razne komplanarne prave. Tada je jedina moguća fiksna tačka kompozicije $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ zajednička tačka pravih p i q (ukoliko se seku), tj.

$$\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p(X)=X \Leftrightarrow X=p\cap q.$$

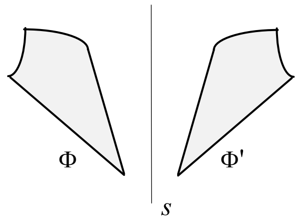
Dokaz: $\Leftarrow$. Trivijalno, jer ako $X\in p$ i $X\in q$, tada je $\mathcal{S}_p(X)= \mathcal{S}_q(X)=X$, pa je i $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p(X)=X$.

$\Rightarrow$. Neka je $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p(X)=X$ i $\mathcal{S}_p(X)=X'$. Tada je $\mathcal{S}_q(X')=X$. Pretpostavimo da je $X\neq X'$. U tom slučaju su, na osnovu teoreme 3, p i q medijatrise duži XX'. To nije moguće jer duž ne može imati dve razne medijatrise pa mora biti $X=X'$. Tada je $\mathcal{S}_p(X)=\mathcal{S}_q(X)=X$, pa tačka X pripada pravama p i q. Kako su one različite, to je njihova presečna tačka. ❑

Na osnovu prethodne teoreme ako se p i q seku kompozicija $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ ima samo jednu fiksnu tačku - to je njihova presečna tačka. Ako su prave p i q paralelne kompozicija $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ nema fiksnih tačaka. Postavlja se pitanje, da li se svaka direktna izometrija $\mathcal{J}$ ravni može predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije i to: čije se ose seku ako izometrija $\mathcal{J}$

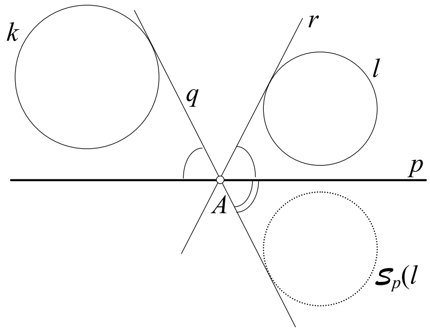
ima fiksnu tačku, ili su paralelne ako nema fiksnih tačaka. To pitanje razmatraćemo u narednom odeljku.

Definicija. Prava s je *osa simetrije* figura Φ i Φ' ako je $\mathcal{S}_s(\Phi)=\Phi'$. Specijalno ako je $\Phi=\Phi'$ tj. $\mathcal{S}_s(\Phi)=\Phi$, kaže se da je figura Φ o*snosimetrična* i da je s njena *osa simetrije*.



Primer. Neka su k i l dva kruga sa iste strane prave p neke ravni. Konstruisati tačku A na pravoj p takvu da različite tangente iz te tačke na krugovima k i l sa pravom p određuju podudarne uglove.

Rešenje: Izostavićemo detaljno rešenje ovog zadatka, koje uključuje sve etape konstrukcije (glava VI). Neka su q i r tangente krugova k i l redom, koje se seku na pravoj p i sa njom određuju podudarne uglove. Tada je p bisektrisa ugla koji one određuju pa je $\mathcal{S}_p(r)=q$. Dakle, prava q je tangenta i kruga $\mathcal{S}_p(l)$, pa je možemo konstruisati kao zajedničku tangentu krugova k i $\mathcal{S}_p(l)$. ❑



Zadaci

1. Dokazati da je osna refleksija jednoznačno određena sa parom X, X' odgovarajućih različitih tačaka.

2. Neka su A i B dve tačke sa iste strane prave p. Odrediti tačku X na pravoj p takvu da je zbir $AX+XB$ minimalan[32].

3. Ako se prave $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prave neke ravni koje se izometrijom $\mathcal{I}$ te ravni preslikavaju u prave $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, dokazati da je:
$$\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_{p_n} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p_2} \circ \mathcal{S}_{p_1} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'_n} \circ \ldots \circ \mathcal{S}_{p'_2} \circ \mathcal{S}_{p'_1} .$$

4. Ako je $\mathcal{I}$ indirektna izometrija ravni koja tačke A, B preslikava redom u tačke B, A dokazati da je $\mathcal{I}$ osna refleksija.

5. Neka su K i L tačke simetrične temenu A trougla ABC u odnosu na bisektrise unutrašnjih uglova kod temena B i C. Ako je P dodirna tačka upisanog kruga tog trougla sa ivicom BC, dokazati da je P središte duži KL.

6. Neka su k i l krugovi sa raznih strana prave p. Konstruisati pravilan trougao ABC čija visina AA' pripada pravoj p a druga dva temena B i C su redom na krugovima k i l.

7.3 Predstavljanje izometrija ravni pomoću osnih refleksija

U ovom odeljku dokazaćemo značajno tvrđenje, da se svaka izometrija ravni može predstaviti kao kompozicija konačnog broja osnih refleksija. U tom smislu kaže se da osne refleksije *generišu* grupu svih izometrija neke ravni. Jasno je, da je broj osnih refleksija koji generišu neku izometriju paran ako je izometrija direktna, odnosno neparan ako je ona indirektna.

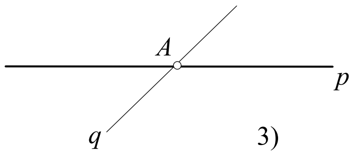
Teorema. Svaka izometrijska transformacija ravni može se predstaviti kao kompozicija konačnog broja osnih refleksija, pri čemu se te osne refleksije uvek mogu tako izabrati, da njihov broj u kompoziciji ne bude veći od tri.

Dokaz: Neka je $\mathcal{I} : E^2 \to E^2$ izometrija ravni. Dokaz ćemo izvesti razmatrajući slučajeve po broju fiksnih tačaka.

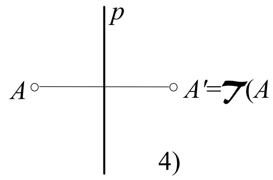
[32] *Heron iz Aleksandrije* (*II* vek) formulisao je zakon: *zrak emitovan iz tačke A, koji se odbija od p i stiže u tačku B, prelazi najkraći mogući put.*

1) Ako izometrija $\mathcal{T}$ ima bar tri nekolinearne fiksne tačke, tada je ona koincidencija, pa je $\mathcal{T} = \mathcal{E} = \mathcal{S}_p^2$; gde je p proizvoljna prava te ravni.

2) Neka izometrija $\mathcal{T}$ ima bar dve fiksne tačke. Ako je $\mathcal{T}$ direktna tada je na osnovu teoreme 2, odeljka 7.1, $\mathcal{T}$ koincidencija pa se to svodi na slučaj 1). Ako je $\mathcal{T}$ indirektna, tada ona na osnovu teoreme 6, iz prethodnog odeljka, predstavlja osnu refleksiju.



3)



4)

3) Neka izometrija $\mathcal{T}$ ima tačno jednu fiksnu tačku A. $\mathcal{T}$ ne može biti indirektna jer bi u tom slučaju predstavlja osnu refleksiju, koja ima više od jedne fiksne tačke. Neka je $\mathcal{T}$ direktna. Označimo sa p proizvoljnu pravu koja sadrži tačku A i neka je $\mathcal{S}_p$ osna refleksija sa osom p. Izometrija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}$ je indirektna sa fiksnom tačkom A, pa predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_q$ čija osa q sadrži tačku A. Dakle $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T} = \mathcal{S}_q$, tj. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$.

4) Neka izometrija $\mathcal{T}$ nema fiksnih tačaka. Tada je za proizvoljnu tačku A te ravni $\mathcal{T}(A)=A' \neq A$. Neka je p medijatrisa duži AA' i $\mathcal{S}_p$ osna refleksija sa osom p. Tada je $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}(A)=\mathcal{S}_p(A')=A$. Dakle, izometrija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}$ ima bar jednu fiksnu tačku A, pa se na osnovu prethodnih slučajeva $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T}$ može predstaviti kao kompozicija najviše dve osne refleksije, tj. $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T} = \mathcal{S}_q$ ili $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{T} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. Odatle sledi da se izometrija $\mathcal{T}$ može predstaviti kao kompozicija najviše tri osne refleksije, tj. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ ili $\mathcal{T} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$. ❑

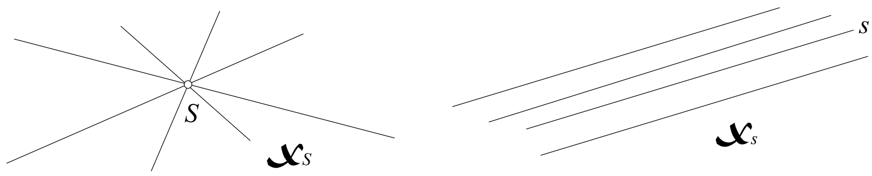
Naravno, neka izometrija se može predstaviti i kao proizvod više od tri osne refleksije, ali se, na osnovu prethodne teoreme, uvek mogu izabrati neke druge ose tako da njihov broj u kompoziciji ne bude veći od tri. Dalje, iz dokaza prethodne teoreme, možemo zaključiti da se svaka direktna izometrija $\mathcal{T}$ može predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije, tj. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Ako je $\mathcal{T}$ koincidencija, tada je $p=q$. Ako $\mathcal{T}$ ima fiksnih tačaka, tada se p i q seku u toj fiksnoj tački, i ako nema fiksnih tačaka tada su p i q paralelne (teorema 9, iz prethodnog odeljka). Ako je

$\mathcal{T}$ indirektna izometrija, tada je ona ili osna refleksija ili se može predstaviti kao kompozicija tri osne refleksije. Ako pri tom $\mathcal{T}$ ima fiksnih tačaka tada ona mora biti osna refleksija. U narednom odeljku razmatraćemo pitanje kada kompozicija tri osne refleksije predstavlja osnu refleksiju.

7.4 Pramenovi pravih u ravni

Uvedimo pojam pramenova pravih u ravni, za koji će se pokazati da je veoma značajan u klasifikaciji izometrija:

Definicija. Skup svih pravih neke ravni koje se seku u nekoj tački S naziva se *pramen konkurentnih pravih* sa *središtem* S i označava sa $\mathcal{X}_S$. Skup svih pravih neke ravni koje su paralelne sa nekom pravom s te ravni



naziva se *pramen paralelnih pravih* i označava sa $\mathcal{X}_s$.

Jasno je, da je svaki pramen konkurentnih pravih neke ravni određen središtem S, a svaki pramen paralelnih pravih jednom svojom pravom. Takođe je jasno da je svaki pramen određen sa neke svoje dve prave p, q, pa ćemo ga u tom slučaju označavati sa $\mathcal{X}(p,q)$.

Navedimo sada značajnu teoremu koja povezuje pojmove pramenova i izometrijskih transformacija:

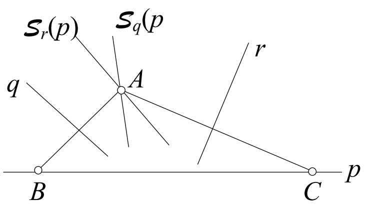
Teorema 1.* Neka su p, q, r tri prave neke ravni. Kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja osnu refleksiju ako i samo ako prave p, q, r pripadaju jednom pramenu. Pri tome osa te refleksije pripada tom pramenu.

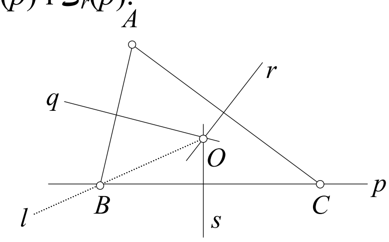
Navedimo i direktnu posledicu prethodne teoreme:

Posledica.* Ako su p, q, r prave nekog pramena tada je $\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_r$.

> ***Primer.*** Neka su p, q, r tri prave neke ravni. Konstruisati trougao ABC čija temena B, C pripadaju pravoj p, takav da su prave q i r medijatrise ivica AB i AC.

Rešenje *(prvi način):* Neka su q i r medijatrise ivica AB i AC. Tada je $\mathcal{S}_q(B)=A$ i $\mathcal{S}_r(C)=A$. Tačke B i C pripadaju pravoj p, pa tačka A pripada slikama te prave u odnosu na refleksije $\mathcal{S}_q$ i $\mathcal{S}_r$. Dakle, teme A možemo konstruisati kao presečnu tačku pravih $\mathcal{S}_q(p)$ i $\mathcal{S}_r(p)$.





Rešenje *(drugi način):* Presek pravih q i r je centar opisanog kruga, tačka O. Dakle, možemo konstruisati i treću medijatrisu s ivice BC, kao normalu u tački O na pravoj p. Kompozicija $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_s$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_l$ (jer $q, r, s\in\mathcal{X}_O$). Fiksne tačke te kompozicije su O i B pa je $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_s=\mathcal{S}_{OB}$. Pravu $OB=l$ dakle možemo konstruisati, kao medijatrisu duži XX', gde je X proizvoljna tačka i $X'=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_s(X)$. U slučaju da je $X=X'$ biće $l=OX$. Konačno B je presečna tačka pravih p i l. ❑

Zadaci

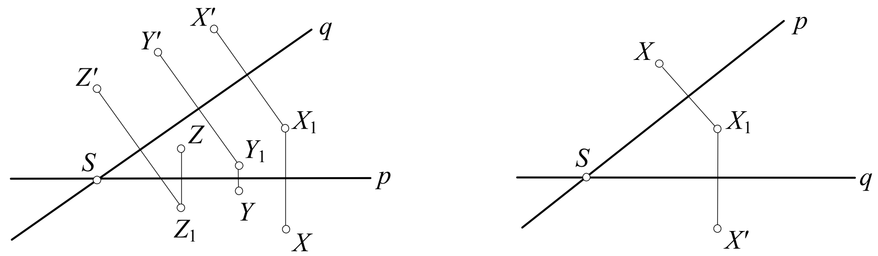
1. Neka je k krug i a, b, c prave neke ravni. Konstruisati trougao ABC upisan u taj krug čije su ivice BC, AC, AB paralelne pravama a, b, c redom.
2. Neka je $ABCDE$ tetivan petougao, takav da je $BC\|DE$ i $CD\|EA$. Dokazati da teme D pripada medijatrisi ivice AB.
3. Ako za prave p, q, r neke ravni važi $\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_r$, dokazati da one pripadaju jednom pramenu.
4. Dokazati da se medijatrise ivica trougla seku u jednoj tački.

5. Dokazati da se bisektrise unutrašnjih uglova trougla seku u jednoj tački.
6. Neka je ABC trougao neke ravni. Dokazati da izometrija $\mathcal{S}_{AB}\circ\mathcal{S}_{AC}\circ\mathcal{S}_{BC}$ nema fiksnih tačaka.

7.5 Centralna rotacija

U prethodnim odeljcima zaključili smo da se svaka direktna izometrija ravni može predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije. Ukoliko se te ose poklapaju, ta kompozicija predstavlja koincidenciju. Preostaju nam još dva slučaja; da se ose seku, odnosno da su paralelne. To nam daje ideju da uvedemo novu vrstu izometrija:

Definicija. Neka su p i q dve prave neke ravni koje se seku u tački S i ω ugao jednak dvostrukom orijentisanom uglu pSq, tj. $\omega=2\measuredangle pSq$. Kompozicija $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ naziva se *centralna rotacija* ili kraće *rotacija* te ravni, u oznaci $\mathcal{R}_{S,\omega}$, sa *centrom* S, za *ugao* ω.



U oznaci rotacije $\mathcal{R}_{S,\omega}$ moguće je umesto samog ugla ω pisati njegovu meru, s tim što je, u slučaju da je orijentacija ugla ω pozitivna, mera pozitivan realan broj, a u slučaju da je orijentacija negativna, mera negativan broj. U drugoj glavi, negativnu orijentaciju uveli smo intuitivno kao onu u "smeru kazaljke na satu". Kako orijentacija ugla, u tom poglavlju, nije do kraja strogo uvedena, ni dokazi vezani za tu orijentaciju ne mogu biti u potpunosti strogi.

Dokažimo neka osnovna svojstva rotacije:

Teorema 1. Jedina fiksna tačka rotacije je centar te rotacije.

Dokaz: Neka je $\mathcal{R}_{S,\omega}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$, i $S=p\cap q$. Tada je S jedina fiksna tačka kompozicije $\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ (teorema 9, odeljak 7.2). ❑

Teorema 2. Rotacija je direktna izometrijska transformacija.

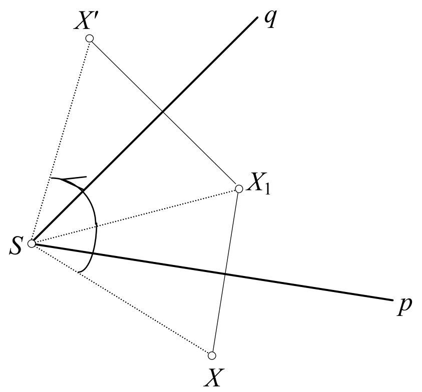
Dokaz: Zaista, rotacija je direktna izometrija, kao kompozicija dve osne refleksije, koje su indirektne izometrije. ❑

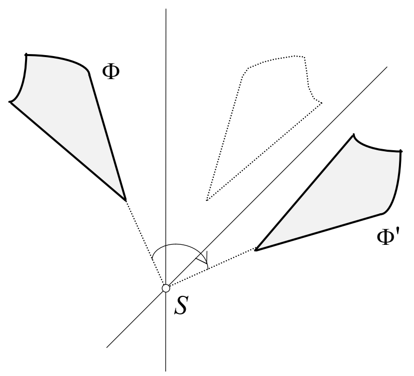
Dokažimo sada, kao kod osne refleksije, da rotacija ima svojstvo koje smo u osnovnoj školi koristili kao njenu definiciju. Naravno, takavu definiciju rotacije smo mogli i ovde uvesti, ali ovaj način njenog definisanja više odgovara ideji klasifikacije izometrija.

Teorema 3. Neka je $\mathcal{R}_{S,\omega}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$, i $S=p\cap q$, $\measuredangle XSX'\cong\omega$. rotacija neke ravni i X tačka te ravni, različita od centra S. Tada je $\mathcal{R}_{S,\omega}(X)=X'$, ako i samo ako je $\measuredangle XSX'\cong\omega$ i $SX\cong SX'$. Tj:

$$X\neq S \Rightarrow (\ \mathcal{R}_{S,\omega}(X)=X' \Leftrightarrow (\measuredangle XSX'\cong\omega \wedge SX\cong SX')\ )$$

Dokaz: $\underline{\Rightarrow.}$ Neka je $\mathcal{R}_{S,\omega}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{R}_{S,\omega}(X)=X'$, za neku tačku $X\neq S$. Tada $\mathcal{R}_{S,\omega}:S,X\mapsto S,X'$, pa kako je $\mathcal{R}_{S,\omega}$ izometrija, mora biti $SX\cong SX'$.





Dokažimo da su uglovi XSX' i ω podudarni i iste orijentacije. Neka je $\mathcal{S}_p(X)=X_1$. Tada je $\mathcal{S}_q(X_1)=X'$. Razmatraćemo samo slučaj kad tačka X_1 pripada odgovarajućem orijentisanom uglu određenom pravama p i q (koji je polovina orijentisanog ugla ω). U tom slučaju je:

$$\begin{aligned}\measuredangle XSX' &= \measuredangle XSX_1+\measuredangle X_1SX' \\ &= 2\measuredangle p,SX_1+2\measuredangle SX_1,q \\ &= 2(\measuredangle p,SX_1+\measuredangle SX_1,q) \\ &= 2\measuredangle pq=\omega.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$. Neka su uglovi XSX' i ω podudarni i iste orijentacije i $SX \cong SX'$. Neka je dalje, $X'' = \mathcal{R}_{S,\omega}(X)$. Na osnovu prvog dela dokaza su uglovi XSX'' i ω podudarni i iste orijentacije i $SX \cong SX''$. Dakle, tačke X' i X'' pripadaju krugu $k(S,SX)$ i odgovarajućoj polupravoj l takvoj da je $\measuredangle XS,l \cong \omega$. Odatle zaključujemo da je $X' = X''$ tj. $\mathcal{R}_{S,\omega}(X) = X'$. ❑

Direktna posledica prethodne teoreme je sledeće značajno tvrđenje:

Teorema 4. Rotacija $\mathcal{R}_{S,\omega}$ je jednoznačno određena svojim centrom S i uglom ω, i može se predstaviti kao kompozicija proizvoljnih osnih refleksija čije se ose p i q seku u tački S i određuju orijentisani ugao jednak uglu $\omega/2$.

Dokazali smo da je rotacija direktna izometrija i da ima tačno jednu fiksnu tačku. Sada ćemo dokazati i obratno tvrđenje:

Teorema 5. Direktna izometrija ravni sa tačno jednom fiksnom tačkom je rotacija.

Dokaz: Neka je $\mathcal{T}$ direktna izometrija sa jedinstvenom fiksnom tačkom S. Na osnovu teoreme o predstavljanju izometrija, svaka direktna izometrija može se predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije tj. $\mathcal{T} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Ne može biti $p = q$, jer bi $\mathcal{T}$ predstavljala koincidenciju, a ona nema samo jednu fiksnu tačku. Prema teoremi 9, odeljka 7.2, jedina fiksna tačaka kompozicije $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ je presečna tačka pravih p i q. Dakle, p i q se seku u tački S pa je $\mathcal{T}$ po definiciji rotacija sa centrom S. ❑

Na taj način smo ispitali koje su sve izometrije sa fiksnim tačkama. U narednim odeljcima ostaje nam da razmotrimo izometrije koje nemaju fiksnih tačaka.

Teorema 6.* Neka je $\mathcal{T}$ izometrija, i $\mathcal{R}_{S,\omega}$ rotacija iste ravni. Ako je $S' = \mathcal{T}(S)$, tada je:

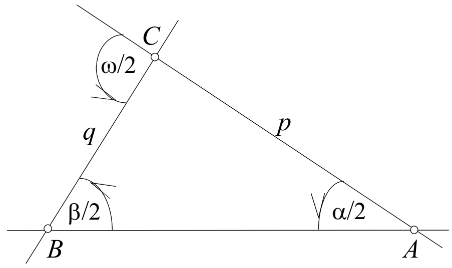
$$\mathcal{T} \circ \mathcal{R}_{S,\omega} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{R}_{S',\omega'} ;$$

gde je $\omega' = \omega$, ako je $\mathcal{T}$ direktna i $\omega' = -\omega$, ako je $\mathcal{T}$ indirektna.

Lako se dokazuje da inverzna transformacija rotacije predstavlja takođe rotaciju sa istim centrom, za podudaran ugao suprotne orijentacije.

U primeni rotacija, od velikog značaja je kompozicija dve rotacije. U vezi sa tim važno je naredno tvrđenje:

Teorema 8. Neka su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$, $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve rotacije neke ravni, takve da je $\alpha+\beta\neq 0^\circ$ i $\alpha+\beta\neq\pm 360^\circ$. Tada kompozicija $\mathcal{R}_{B,\beta}\circ\mathcal{R}_{A,\alpha}$ predstavlja rotaciju za ugao $\alpha+\beta$ sa centrom C; gde je $\measuredangle CAB=\alpha/2$ i $\measuredangle ABC=\beta/2$.

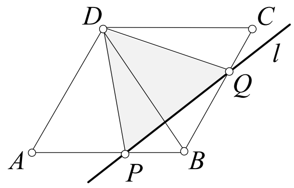


Dokaz: Pretpostavimo da su centri A i B različiti (slučaj kada je $A=B$ je trivijalan). Neka su p i q prave te ravni, takve da je $\measuredangle p,AB=\alpha/2$ i $\measuredangle AB,q=\beta/2$. Iz uslova teoreme je $\alpha+\beta\neq 180^\circ$, pa se prave p i q seku u nekoj tački C. Rastavljajući svaku od rotacija pomoću osnih refleksija dobijamo:

$\mathcal{R}_{B,\beta}\circ\mathcal{R}_{A,\alpha}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_{AB}\circ\mathcal{S}_{AB}\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{R}_{C,\omega}$, gde je $C=p\cap q$ i $\omega=2\measuredangle pCq$.

Ugao $\measuredangle pCq$ je spoljašnji ugao trougla ABC pa je jednak zbiru uglova $\measuredangle p,AB$ i $\measuredangle AB,q$. Odatle sledi $\omega=\alpha+\beta$. ❑

Primer. Neka je $ABCD$ romb kod koga je unutrašnji ugao kod temena A jednak 60°. Ako prava l seče ivice AB i BC, tog romba, u tačkama P i Q takvim da je $BP+BQ=AB$, dokazati da je trougao PQD pravilan.



Rešenje: Najpre iz uslova zadatka, kako je $AB\cong BC$, sledi i $AP\cong BQ$ (1). Rotacija $\mathcal{R}_{D,60^\circ}$ preslikava tačke A, B redom u tačke B i C. Dakle, ta rotacija preslikava polupravu AB u polupravu BC, i konačno na osnovu uslova (1), tačku P u tačku Q. Sada iz $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(P)=Q$ direktno sledi da je trougao APQ pravilan. ❑

Zadaci

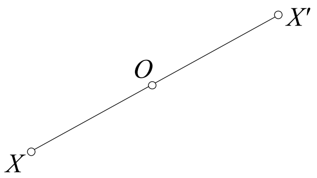
1. Ako su $\mathcal{R}_{S,\omega}$ rotacija i $\mathcal{S}_p$ osna refleksija neke ravni, takve da $S\in p$, dokazati da svaka od kompozicija $\mathcal{R}_{S,\omega}\circ\mathcal{S}_p$, $\mathcal{S}_p\circ\mathcal{R}_{S,\omega}$ predstavlja osnu refleksiju te ravni.
2. Ako neka izometrija ravni ima tačno jednu fiksnu tačku, dokazati da ona predstavlja rotaciju.

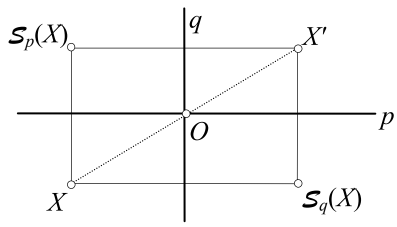
3. Neka su p i q prave neke ravni i A tačka te ravni van pravih p i q. Konstruisati tačke B i C na pravama p i q tako da je trougao ABC pravilan.
4. Konstruisati kvadrat kome je jedno teme data tačka A a krajnje tačke dijagonale, koja ne sadrži to teme, pripadaju datom krugu k.
5. Neka je ABC trougao neke ravni i $\alpha=\measuredangle CAB$, $\beta=\measuredangle ABC$, $\gamma=\measuredangle BCA$, dokazati da je: $\mathcal{R}^2_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}^2_{B,\beta} \circ \mathcal{R}^2_{A,\alpha} = \mathcal{E}$.

7.6 Centralna simetrija

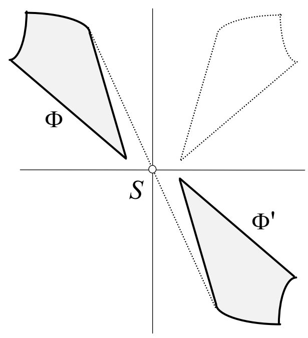
Specijalan slučaj rotacije za ugao 180° razmatraćemo kao posebnu vrstu izometrija:

Definicija. Centralna rotacija $\mathcal{R}_{O,\omega}$ ravni za ugao $\omega=180^\circ$ naziva se *centralna simetrija* sa *centrom* O, u oznaci $\mathcal{S}_O$. Dakle $\mathcal{S}_O = \mathcal{R}_{O,180^\circ}$.





Kako je po definiciji centralna simetrija vrsta rotacije, za nju važe sva opšta svojstva rotacije dokazana u prethodnom odeljku. Sada ćemo istaći neka specifična svojstva centralne simetrije. Najpre na osnovu teoreme 3, iz prethodnog odeljka važi: za tačku $X\neq O$ je $\mathcal{S}_O(X)=X'$ akko je O središte duži XX'.



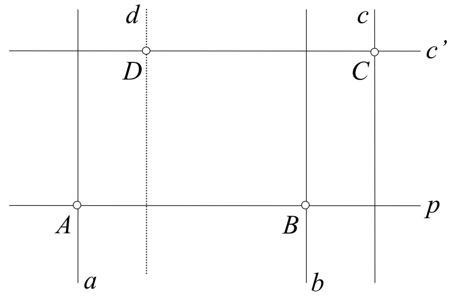
Zatim, centralna simetrija $\mathcal{S}_O$ se može predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije čije su ose međusobno upravne. Prema teoremi 8, poglavlja 7.2, te osne refleksije komutiraju, tj. $\mathcal{S}_O=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q$, gde je $p\perp q$ i $p\cap q=O$. Posledica toga je sledeće tvrđenje:

Teorema 1. Centralna simetrija ravni je involucija.

Prethodno tvrđenje je i intuitivno jasno jer je rotacija za ugao 180^o isto što i rotacija za ugao -180^o.

Teorema 2. Kompozicija tri centralne simetrije ravni predstavlja centralnu simetriju. U slučaju da su centri tih simetrija nekolinearne tačke, centar dobijene simetrije je četvrto teme paralelograma.

Dokaz: Neka su $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$, $\mathcal{S}_C$ tri osne refleksije sa centrima A, B, C. Označimo sa p pravu AB; sa a, b, c redom prave koje sadrže tačke A, B, C i normalne su na pravoj p, i sa c' pravu koja je u tački C normalna na pravoj c. Tada je:



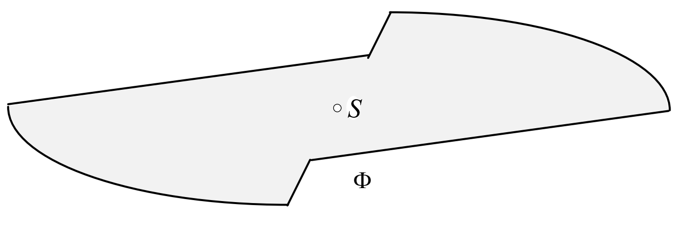
$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a$$
$$= \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a.$$

Ose a, b, c su u istom pramenu paralelnih pravih $\mathcal{X}_a$, jer su sve normalne ne pravoj p. Dakle, kompozicija $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ predstavlja osnu refleksiju $\mathcal{S}_d$ čija osa d pripada tom pramenu. Tada su prave c', d normalne pa je:

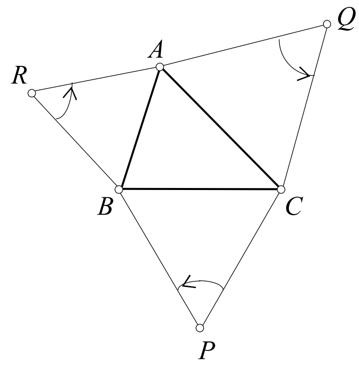
$$\mathcal{S}_C \circ \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{c'} \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{S}_D ,$$

gde je $D = d \cap c'$. Pri tome, paralelne prave a i c i paralelne prave b i d imaju zajedničku osu simetrije pa je, u slučaju da su tačke A, B, C nekolinearne, četvorougao $ABCD$ paralelogram. ❑

Definicija. Tačka S je *centar simetrije* figure Φ ako je $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ako neka figura ima centar simetrije kaže se da je ona *centralnosimetrična*.



Primer. Neka su P, Q, R tri nekolinearne tačke. Konstruisati trougao ABC, takav da su trouglovi ARB, BPC, CQA pravilni i jednako orijentisani.



Rešenje: Ako su P, Q, R tačke koje ispunjavaju uslove zadatka, tada je:

$$\mathcal{R}_{R,60^\circ} \circ \mathcal{R}_{P,60^\circ} \circ \mathcal{R}_{Q,60^\circ}(A) = A.$$

Ali ta kompozicija predstavlja centralnu simetriju ($60^\circ+60^\circ+60^\circ=180^\circ$) čija je tačka A fiksna, pa je:

$$\mathcal{R}_{R,60^\circ} \circ \mathcal{R}_{P,60^\circ} \circ \mathcal{R}_{Q,60^\circ} = \mathcal{S}_A.$$

Teme A možemo sada konstruisati kao središte duži XX', gde je X' slika proizvoljne tačke X u toj kompoziciji. ❑

Zadaci

1. Dokazati da kompozicija osne refleksije i centralne simetrije, čiji centar pripada osi te refleksije, predstavlja osnu refleksiju.

2. Neka je $\mathcal{I}$ izometrija i $\mathcal{S}_O$ centralna simetrija neke ravni. Ako je $\mathcal{I}(O)=O'$, dokazati da je:
$$\mathcal{I}\circ\mathcal{S}_O\circ\mathcal{I}^{-1}=\mathcal{S}_{O'}.$$

3. Neka je A jedna od presečnih tačaka krugova k i l. Konstruisati pravu koja sadrži tačku A i krugove k i l seče u tačkama B i C takvim da je $BA\cong AC$.

4. Dokazati da tačke simetrične ortocentru trougla, u odnosu na središta njegovih ivica, pripadaju krugu opisanom oko tog trougla.

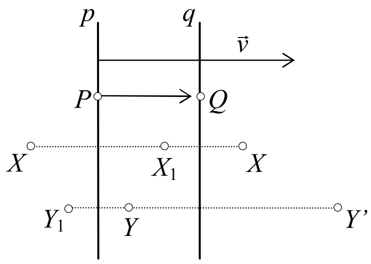
5. Neka su O, P, Q tri nekolinearne tačke neke ravni. Konstruisati kvadrat $ABCD$ u toj ravni, čiji je centar tačka O i takav da tačke P i Q pripadaju pravama AB i CD.

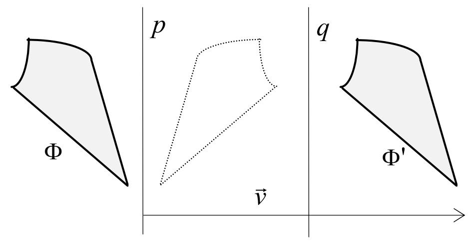
6. Ako neka figura ravni ima tačno dve ose simetrije tada je ona i centralno-simetrična.

7.7 Translacija

Dokazali smo da se sve direktne izometrije mogu predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije. Razmotrili smo slučajeve kada se ose tih refleksija poklapaju i kad se seku. Ostaje nam još mogućnost da su ose paralelne i različite:

Definicija. Neka su p i q dve razne paralelne prave neke ravni i P, Q tačke tih pravih redom, takve da je $PQ \perp p$. Kompozicija $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ naziva se *translacija* te ravni *za vektor* $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$, u oznaci $\tau_{\vec{v}}$.

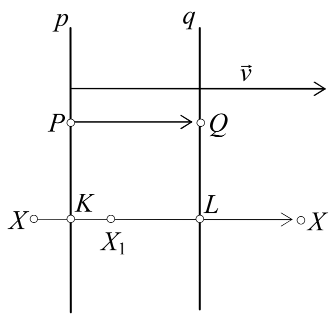




Jasno je da je translacija direktna izometrija, kao kompozicija dve osne refleksije. Na osnovu teoreme 9, iz odeljka 7.2, translacija nema fiksnih tačaka. Kao kod ranije uvedenih izometrija i ovde ćemo dokazati da translacija odgovara našoj ranijoj predstavi, tj:

Teorema 1. Neka je $\tau_{\vec{v}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ translacija neke ravni za vektor $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ ($P \in p$, $Q \in q$, $PQ \perp p$) i X proizvoljna tačka te ravni. Tada: $\tau_{\vec{v}}(X) = X' \Leftrightarrow \overrightarrow{XX'} = \vec{v}$.

Dokaz: $\underline{\Rightarrow.}$ Neka je $\mathcal{S}_p(X) = X_1$. Kako je $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(X) = X'$, mora biti $\mathcal{S}_q(X_1) = X'$. Prave p i q su po definiciji paralelne, pa su to i prave XX_1 i X_1X'. Odatle sledi da su tačke X, X_1, X' kolinearne. Razmotrićemo samo slučaj kad je $\mathcal{B}(X, X_1, X')$. Neka prava XX' seče prave p i q u tačkama K i L. Tada je četvorougao $PQLK$ pravougaonik.



Takođe je zbog osobina osne refleksije $XK \cong KX_1$ i $X_1L \cong LX'$, pa je $\overrightarrow{XX'} = 2\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

$\Leftarrow$. Neka je $\overrightarrow{XX'} = \vec{v}$ i $\tau_{\vec{v}}(X)=X''$, tada je na osnovu prethodno dokazanog $\overrightarrow{XX''} = \vec{v}$. Dakle $\overrightarrow{XX''} = \overrightarrow{XX'}$, pa je $\tau_{\vec{v}}(X)=X''=X'$. ❑

Na osnovu toga važi:

Teorema 2. Translacija $\tau_{\vec{v}}$ je jednoznačno određena svojim vektorom $\vec{v}$, i može se predstaviti kao kompozicija proizvoljne osne refleksije čije su ose dve paralelne prave p i q, takve da za neke dve tačke $P \in p$, $Q \in q$, $PQ \perp p$, važi: $2\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

Analogno teoremama iz prethodnih glava, dokažimo teoremu o klasifikaciji izometrija koja se odnosi na translaciju.

Teorema 3. Direktna izometrija ravni bez fiksnih tačaka je translacija.

Dokaz: Svaka direktna izometrija može se predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije. Ta kompozicija nema fiksnih tačaka jedino u slučaju kad su ose paralelne i različite (teorema 9, odeljak 7.2), pa na osnovu definicije predstavlja translaciju. ❑

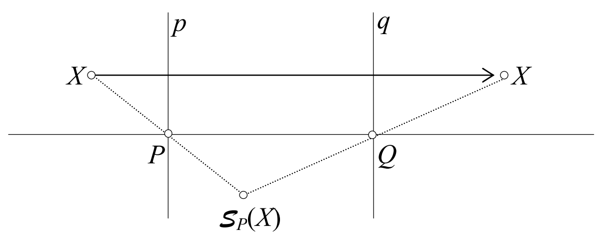
Sada ćemo dokazati da se translacija može predstaviti kao kompozicija centralnih simetrija, što će kasnije biti od velikog značaja.

Teorema 4. Neka je $\tau_{\vec{v}}$ translacija ravni za vektor $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$. Tada je:

$$\tau_{\vec{v}} = \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P.$$

Dokaz: Neka su p i q prave normalne na pravoj PQ u tačkama P i Q. Tada je:

$$\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \tau_{\vec{v}}. \text{ ❑}$$



Intuitivno je jasno, da je inverzna transformacija translacije takođe translacija za suprotan vektor; kao i da je kompozicija dve translacije translacija za zbirni vektor. Formulišimo ta tvrđenja:

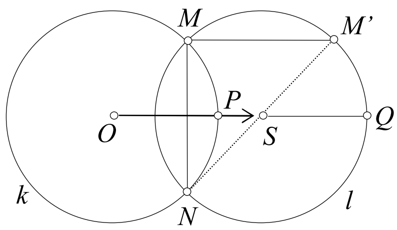
Teorema 5.* Neka su $\tau_{\vec{v}}$, $\tau_{\vec{u}}$, translacije iste ravni za vektore $\vec{v}$ i $\vec{u}$. Tada:

(i) $\tau_{\vec{v}}^{\ -1} = \tau_{-\vec{v}}$;

(ii) $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}+\vec{u}}$;

(iii) $\tau_{\vec{u}} \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \tau_{\vec{u}}$.

Primer. Neka su M i N zajedničke tačke dva podudarna kruga k i l poluprečnika r. Ako su P i Q presečne tačke ta dva kruga sa pravom određenom centrima tih krugova, takve da je $P,Q \div MN$, dokazati da je tada $MN^2 + PQ^2 = 4r^2$.



Rešenje: Neka su O i S centri tih krugova i $\overrightarrow{OS} = \vec{v}$. Tada translacija $\tau_{\vec{v}}$ preslikava krug k u krug l i tačku M u neku tačku M'. Kako tačka M pripada krugu k, njena slika, M' pripada krugu l. Iz istih razloga je $\tau_{\vec{v}}(P)=Q$. Dalje je $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PQ}$, pa su prave MM' i OS paralelne i $MM' \cong OS \cong PQ$. Kako je prava MN upravna na pravu OS, mora biti upravna i na MM'. Dakle, ugao NMM' je prav pa je NM' prečnik kruga l. Primenjujući *Pitagorinu teoremu* (koju ćemo dokazati u glavi *VIII*, a sa kojom je čitalac od ranije upoznat), možemo izvesti: $MN^2 + PQ^2 = MN^2 + MM'^2 = NM'^2 = 4r^2$.

Zadaci

1. Neka je $\mathcal{I}$ izometrija i $\tau_{\vec{v}}$ translacija neke ravni za vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Tada:

$$\mathcal{I} \circ \tau_{\vec{v}} \circ \mathcal{I}^{-1} = \tau_{\vec{u}}, \quad \text{gde je } \vec{u} = \overrightarrow{A'B'} \text{ i } A' = \mathcal{I}(A),\ B' = \mathcal{I}(B).$$

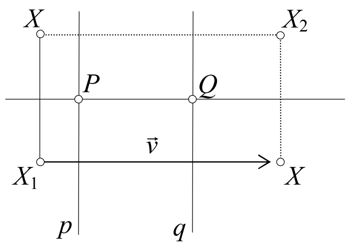
2. Ispitati šta predstavlja kompozicija translacije i centralne simetrije neke ravni.

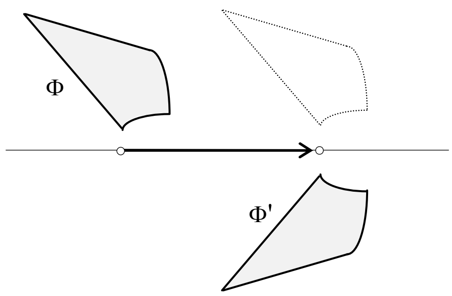
3. Neka su A, B dve tačke i k, l dva kruga neke ravni. Konstruisati tačke $C \in k$ i $D \in l$ takve da je četvorougao $ABCD$ paralelogram.
4. Neka je p prava i k, l krugovi neke ravni. Konstruisati pravu paralelnu pravoj p koja seče te krugove u tačkama koje određuju podudarne tetive.
5. Neka su a i b dve paralelne prave, c prava koja ih seče i l duž neke ravni. Konstruisati pravilan trougao ABC čija su temena redom na datim pravama i čija je ivica podudarna datoj duži l.

7.8 Klizajuća refleksija

U prethodnim odeljcima ispitali smo sve vrste izometrija ravni koje se mogu predstaviti kao kompozicija dve osne refleksije. Kako se svaka izometrija ravni može predstaviti kao kompozicija ne više od tri osne refleksije, ostaje nam da ispitamo šta predstavlja kompozicija tri osne refleksije. Dokazali smo da je ta kompozicija takođe osna refleksija akko ose tih refleksija pripadaju jednom pramenu. U svim ostalim slučajevima, što ćemo kasnije utvrditi, ta kompozicija predstavlja sledeću vrstu izometrija:

Definicija. Neka je translacija $\tau_{\vec{v}}$ za vektor $\vec{v} = 2\overrightarrow{PQ}$ i s_{PQ} osna refleksija sa osom PQ. Kompozicija $\tau_{\vec{v}} \circ s_{PQ}$ naziva se *klizajuća refleksija* ravni u oznaci $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}}$ *sa osom* PQ i *za vektor* $2\overrightarrow{PQ}$.





Na osnovu definicije je jasno da je klizajuća refleksija određena svojom osom i vektorom. Takođe, osna refleksija i translacija u kompoziciji, koje generišu tu klizajuću refleksiju komutiraju. Zaista:

$\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}} = \tau_{\vec{v}} \circ \mathcal{S}_{PQ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{PQ} = \mathcal{S}_{PQ} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{PQ} \circ \tau_{\vec{v}}$;

gde su p i q prave upravne na pravoj PQ u tačkama P i Q, pa zbog toga odgovarajuće osne refleksije komutiraju.

Iz tih relacija zaključujemo da se klizajuća refleksija može predstaviti kao kompozicija tri osne refleksije pri čemu je osa jedne upravna na ose druge dve. Dalje klizajuća refleksija je indirektna izometrija kao kompozicija jedne indirektne i jedne direktne izometrije (ili kao kompozicija tri osne refleksije).

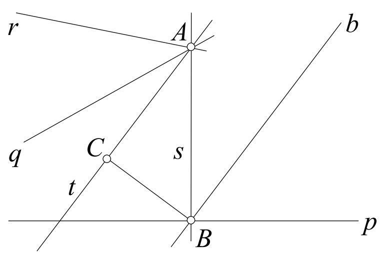
Teorema 1. Klizajuća refleksija nema fiksnih tačaka.

Dokaz: Već smo zaključili da se klizajuća refleksija može predstaviti kao kompozicija tri osne refleksije od kojih je osa jedne upravna na ose druge dve refleksije. Ako bi ta kompozicija imala fiksnu tačku, ona bi kao indirektna izometrija predstavljala osnu refleksiju. Tada bi pomenute tri ose bile iz istog pramena (teorema 1, odeljak 7.4), pa dolazimo do kontradikcije. Dakle, klizajuća refleksija nema fiksnih tačaka. ❑

Dokažimo dva tvrđenja značajna za klasifikaciju izometrija:

Teorema 2. Neka su p, q, r tri prave neke ravni koje ne pripadaju istom pramenu. Tada kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja klizajuću refleksiju te ravni.

Dokaz: Prava q seče ili pravu p ili pravu r, jer bi inače sve tri prave pripadale jednom pramenu paralelnih pravih. Ne umanjujući opštost neka je $q \cap r = A$. Prave p, q, r nisu iz istog pramena pa $A \notin p$. Neka je s prava koja sadrži tačku A i upravna je na pravoj p u tački B ($B \neq A$). Tada prave s, q, r pripadaju istom pramenu $\mathcal{X}_A$, pa je $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_t$, gde $t \in \mathcal{X}_A$. Odatle sledi $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_s$, odnosno:



$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_B$.

Označimo sa C podnožje upravne iz tačke B na pravoj t ($B \neq C$, jer bi se u suprotnom prave s i t a onda i prave r i q poklapale), i sa b pravu koja je u tački B upravna na pravoj BC. Tada je:

$\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{BC} = \tau_{2\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{G}_{2\overrightarrow{BC}}$. ❑

Teorema 3. Svaka indirektna izometrija ravni bez fiksnih tačaka predstavlja
klizajuću refleksiju te ravni.

Dokaz: Na osnovu teoreme o predstavljanju izometrije, svaka indirektna izometrija je ili osna refleksija ili se može predstaviti kao kompozicija tri osne refleksije. Ako su te tri ose iz istog pramena izometrija opet predstavlja osnu refleksiju. U našem slučaju, kako izometrija nema fiksnih tačaka, ona ne može biti osna refleksija pa predstavlja kompoziciju tri osne refleksije čije ose nisu iz istog pramena. Na osnovu prethodne teoreme ta kompozicija je klizajuća refleksija. ❑

Zadaci

1. Dokazati da kompozicija rotacije i osne refleksije neke ravni predstavlja klizajuću refleksiju ako i samo ako centar te rotacije ne pripada osi refleksije.
2. Neka je ABC pravilan trougao. Dokazati da kompozicija $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{BC}$ predstavlja klizajuću refleksiju i odrediti njen vektor i osu.
3. Neka je p prava, A, B tačke sa iste strane te prave i l duž neke ravni. Konstruisati tačke X i Y na toj pravoj tako da je $XY \cong l$ i zbir $AX+XY+YB$ minimalan.
4. Neka je ABC jednakokrako-pravougli trougao sa pravim uglom kod temena A. Šta predstavlja kompozicija: $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}}$?

7.9 Klasifikacija izometrija ravni

U prethodnim odeljcima smo praktično već izvršili klasifikaciju izometrija ravni. Dokazali smo da je svaka direktna izometrija koincidencija, rotacija odnosno translacija u zavisnosti da li ima bar dve, tačno jednu, odnosno nema fiksnih tačaka. Takođe, indirektna izometrija je osna, odnosno klizajuća refleksija u zavisnosti da li ima bar jednu, odnosno nema fiksnih tačaka. Na osnovu toga možemo zaključiti da su to jedine vrste izometrija. Time smo dokazali sledeću teoremu:

Teorema 1. (*Šal*[33]) Neka je $\mathcal{T} : E^2 \to E^2$ izometrijska transformacija ravni. Tada ona predstavlja jednu od sledećih izometrija: koincidencija, osna refleksija, rotacija, translacija, klizajuća refleksija. Takođe važi:

(i) ako je $\mathcal{T}$ direktna i ima bar dve fiksne tačke ona je koincidencija;

(ii) ako je $\mathcal{T}$ direktna i ima tačno jednu fiksnu tačku ona je rotacija (spec. centralna simetrija);

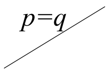
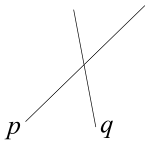
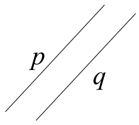
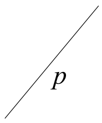
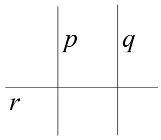
(iii) ako je $\mathcal{T}$ direktna i nema fiksnih tačaka ona je translacija;

(iv) ako je $\mathcal{T}$ indirektna i ima bar jednu fiksnu tačku ona je osna refleksija;

(v) ako je $\mathcal{T}$ indirektna i nema fiksnih tačaka ona je klizajuća refleksija.

Osim toga, utvrdili smo u svakom od slučajeva kako se odgovarajuća izometrija može predstaviti kao kompozicija osnih refleksija. Sve te činjenice vezane za klasifikaciju izometrija možemo ilustrovati sledećom tabelom:

[33] *M. Šal* (1793-1880), francuski geometričar, izveo je ovu klasifikaciju 1831. g.

	Izometrijske transformacije ravni $\mathcal{T}: E^2 \to E^2$				
	direktne izometrije			indirektne izometrije	
broj fiksnih tačaka	bar dve	tačno jedna	nijedna	bar jedna	nijedna
vrsta izometrije	*koinci-dencija* $\mathcal{E}$	*centralna rotacija* $\mathcal{R}_{S,\omega}$ *(spec. centr. simetrija* $\mathcal{S}_S$*)*	*translacija* $\tau_{\vec{v}}$	*osna refleksija* $\mathcal{S}_p$	*klizajuća refleksija* $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}}$
predstav-ljanje izometrije osnim refleksija-ma	 $p=q$ $\mathcal{E}=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_p$	 p q $\mathcal{R}_{S,\omega}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$	 p q $\tau_{\vec{v}}=\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$	 p $\mathcal{S}_p$	 p q r $\mathcal{G}_{2\overrightarrow{PQ}}=\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p$

Zadaci

1. Neka su a, b, c tri prave neke ravni. Konstruisati tačke $A\in a$ i $B\in b$ takve da je $\mathcal{S}_c(A)=B$.
2. Neka su p i q dve prave i A tačka neke ravni. Konstruisati tačke B i C, takve da prave p i q sadrže bisektrise unutrašnjih uglova kod temena B i C trougla ABC.
3. Neka su p, q, r tri prave i K i L dve tačke neke ravni. Konstruisati prave s i s' koje sadrže redom tačke K i L, takve da je $\mathcal{S}_r\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p(s)=s'$.
4. Neka su A i B dve tačke sa raznih strana prave p. Odrediti tačku X na pravoj p takvu da je razlika duži AX i XB maksimalna.
5. Neka prava s sadrži bisektrisu jednog od uglova koji određuju prave p i q. Dokazati da je tada: $\mathcal{S}_s\circ\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_s$.

6. Neka je S centar upisanog kruga trougla ABC i P dodirna tačka tog kruga sa ivicom BC. Dokazati da je tada: $\mathcal{S}_{SC}\circ\mathcal{S}_{SA}\circ\mathcal{S}_{SB}=\mathcal{S}_{SP}$.

7. Neka su p, q, r prave neke ravni koje se seku u centru S kruga k. Konstruisati trougao ABC opisan oko tog kruga, tako da prave p, q, r sadrže bisektrise unutrašnjih uglova kod temena A, B, C tog trougla.

8. Prave p, q, r, s, t neke ravni seku se u tački O a M je tačka prave p. Konstruisati petougao takav da je M središte jedne njegove ivice, a prave p, q, r, s, t medijatrise ivica.

9. Neka je $ABCDE$ petougao sa pravim uglom kod temena A i neka se medijatrise ivica AE, BC, CD (prave p, q, r) seku u tački O, a medijatrise ivica AB i DE (prave x i y) seku u tački S. Dokazati da jedno teme trougla KLM kome su p, q, r medijatrise ivica, pripada pravoj OS.

10. Tačka P pripada ravni trougla ABC. Dokazati da prave simetrične pravama AP, BP, CP u odnosu na simetrale unutrašnjih uglova kod temena A, B, C tog trougla redom, pripadaju jednom pramenu.

11. Odrediti ugao između pravih p i q neke ravni ako je:
$$\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q\circ\mathcal{S}_p\circ\mathcal{S}_q.$$

12. Neka je $ABCD$ pravougaonik kod koga je $AB=3BC$ i E, F tačke ivice AB takve da je $AE\cong EF\cong FB$. Dokazati da je:
$$\angle AED+\angle AFD+\angle ABD=90^{\circ}.$$

13. Koliko osa simetrija ima: pravilan trougao; kvadrat; deltoid; krug.

14. Neka su p i q prave i A tačka van njih neke ravni. Konstruisati tačke B i C na pravama p i q redom, tako da obim trougla ABC bude minimalan.

15. U dati trougao ABC upisati trougao najmanjeg obima (*Fagnanov problem*[34]).

16. Ako su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve rotacije neke ravni odrediti sve tačke X te ravni za koje je $\mathcal{R}_{A,\alpha}(X)=\mathcal{R}_{B,\beta}(X)$.

---

[34] *D. F. T. Fagnan* je postavio ovaj problem 1775. g., i rešio ga metodama diferencijalnog računa. Elementarno rešenje ovog problema dao je tek kasnije mađarski matematičar *L. Fejer* (1880-1959).

17. Prave p i q seku se u centru O pravilnog trougla ABC i određuju ugao od 60°. Dokazati da su odsečci na tim pravama, određeni ivicama trougla ABC, međusobno podudarni.

18. Ako je S centar pravilnog petougla $ABCDE$, dokazati da važi:
$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{SE}=\vec{0}.$$

19. Dokazati da se dijagonale pravilnog petougla seku u tačkama koje su takođe temena pravilnog petougla.

20. Neka su ABP i BCQ dva pravilna trougla iste orijentacije, pri čemu je $\mathcal{B}(A,B,C)$. Ako su K i L središta duži AQ i PC, dokazati da je trougao BLK takođe pravilan.

21. Konstruisati pravilan trougao čija temena pripadaju redom trima datim koncentričnim krugovima a jedna ivica paralelna datoj pravoj.

22. Ako se prava p rotacijom za ugao ω preslikava u pravu p', dokazati da je jedan od uglova koji određuju prave p i p' jednak ω.

23. Neka su P i Q tačke van kruga k i d duž neke ravni. Konstruisati tačke X i Y na krugu k, takve da je $XP \parallel YQ$ i $XY \cong d$.

24. Tačka P je unutrašnja tačka pravilnog trougla ABC, takva da je $\angle APB=113^{\circ}$ i $\angle BPC=123^{\circ}$. Izračunati mere uglova trougla čije su ivice podudarne dužima PA, PB, PC.

25. Date su nekolinearne tačke P, Q, R. Konstruisati trougao ABC, tako da P, Q, R budu središta kvadrata konstruisana nad ivicama BC, CA, AB tog trougla.

26. Neka su A, B dve tačke i p prava neke ravni. Dokazati da je kompozicija $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A$ osna refleksija ako i samo ako je $AB \perp p$.

27. Neka su p, q, r tangente kruga upisanog u trougao ABC paralelne redom njegovim ivicama BC, AC, AB ali koje ih ne sadrže. Dokazati da prave p, q, r, BC, AC, AB određuju šestougao čije su naspramne ivice među sobom podudarne.

28. Konstruisati trougao ABC ako je dat ugao α i težišne duži t_b, t_c.

29. Neka su $BALK$ i $ACPQ$ kvadrati spolja konstruisani nad ivicama AB i AC trougla ABC. Ako je tačka Z središte duži PK, dokazati da je trougao BZC jednakokrako-pravougli.

30. Neka su A_1, B_1, C_1 centri kvadrata spolja konstruisanih nad ivicama BC, AC, AB trougla ABC i tačka P središte ivice AC dokazati:

    (*i*) trougao C_1PA_1 je jednakokrako-pravougli;

    (*ii*) duži A_1B_1 i C_1C su upravne i podudarne;

    (*iii*) duži AA_1, BB_1, CC_1 seku se u jednoj tački[35].

31. Neka su $ALKB$, $ACPQ$ kvadrati spolja konstruisani nad ivicama AB i AC trougla ABC i X središte ivice BC. Dokazati da je:

    (*i*) $AX \perp LQ$;

    (*ii*) $AX = \frac{1}{2} QL$.

32. Ispitati šta predstavlja kompozicija dve rotacije neke ravni pri čemu je zbir uglova tih rotacija jednak 360°.

33. Neka su P, Q, R centri pravilnih trouglova spolja konstruisanih nad ivicama proizvoljnog trougla ABC. Dokazati da je trougao PQR pravilan (tzv. *Napoleonov trougao*[36]).

34. Neka je O centar pravilnog trougla ABC i D i E tačke ivica CA i CB takve da je $CD \cong CE$ i F četvrto teme paralelograma $BODF$. Dokazati da je trougao OEF pravilan.

35. Neka je L dodirna tačka kruga upisanog u trougao ABC sa ivicom BC. Ako je $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle CBA$, $\gamma = \measuredangle ACB$, dokazati: $\mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_L$.

36. Ako su P, Q i M, N centri kvadrata spolja konstruisanim nad naspramnim ivicama proizvoljnog četvorougla, dokazati da je $PQ \perp MN$ i $PQ \cong MN$.

37. Neka su APB i ACQ pravilni trouglovi spolja konstruisani nad ivicama AB i AC trougla ABC. Ako je S središte ivice BC i O centar trougla ACQ, dokazati da je $OP = 2OS$.

38. Dokazati da je kompozicija neparnog broja centralnih simetrija, centralna simetrija.

---

[35] Drugo od tri planimetrijska tvrđenja koje je, na kongresu u Milanu 1844. g., objavio italijanski matematičar *Đ. Belati*.

[36] Ovo tvrđenje pripisano je *Napoleonu Bonaparti* (1769-1821), francuskom caru i vojskovođi, koji je imao interesovanja za elementarnu geometriju, iako je pitanje da li je njegovo znanje bilo dovoljno da bi isto tvrđenje dokazao.

39. Neka su P, Q, R, S, T tačke jedne ravni. Konstruisati petougao $ABCDE$ takav da su središta njegovih ivica AB, BC, CD, DE, EA redom tačke P, Q, R, S, T.

40. Odrediti skup svih izometrija, a zatim skup svih direktnih izometrija, koje pravilan n-tougao preslikavaju u sebe samog (prvi skup određuje tzv. *diedarsku grupu* D_n a drugi *Cikličnu grupu* C_n).

41. Odrediti grupu simetrija pravougaonika (*grupa simetrija* neke figure određena je skupom svih izometrija koje tu figuru preslikavaju u sebe).

42. Dokazati da osna refleksija i translacija neke ravni komutiraju ako i samo ako je osa te refleksije paralelna sa vektorom translacije.

43. Neka su k i l dva kruga, p prava i d duž neke ravni. Konstruisati romb $ABCD$ ivice podudarne datoj duži d čija ivica AB pripada pravoj p, a tačke C i D krugovima k i l.

44. Neka su A, B tačke sa iste strane prave p i d duž neke ravni. Konstruisati tačke X i Y na pravoj p takve da je $AX \cong BY$ i $XY \cong d$.

45. Neka je H ortocentar trougla ABC i R poluprečnik opisanog kruga tog trougla. Dokazati da je $AB^2+CH^2=4R^2$.

46. Neka su p i q dve razne paralelne prave neke ravni i A i B tačke te ravni takve da su A i q sa raznih strana prave p, a B i p sa raznih strana prave q. Konstruisati tačke P i Q na pravama p i q takve da je $PQ \perp p$ i zbir $AP+PQ+QB$ minimalan.

47. Neka su AB i CD dve tetive kruga k ($A,B \ddot{-} CD$) i l duž neke ravni. Konstruisati tačku M na krugu k, tako da duži AM i BM seku tetivu CD u tačkama koje određuju duž podudarnu datoj duži l.

48. Neka je EAB trougao konstruisan nad ivicom AB pravougaonika $ABCD$. Ako su M i N podnožja upravnih iz tačaka C i D na pravama AE i BE, i P presečna tačka pravih CM i DN, dokazati da je $PE \perp AB$.

49. Konstruisati pravilan trougao ABC, čija temena pripadaju redom trima datim paralelnim pravama a, b, c neke ravni, a centar tog trougla pripada datoj pravoj s koja seče prave a, b, c.

50. Dokazati da *ograničena figura* Φ ravni (za koju postoji duž d takva da za svake dve tačke $X,Y\in\Phi$, važi $XY<d$) ne može imati dva različita centra simetrije.

51. Ako petougao ima bar dve ose simetrije, dokazati da je on pravilan.

52. Neka su A, B, C tri kolinearne tačke. Ispitati šta predstavlja kompozicija: $\mathcal{G}_{\overline{BC}} \circ \mathcal{S}_A$.

53. Neka je t tangenta kruga opisanog oko trougla ABC u temenu A. Dokazati da je:
$$\mathcal{G}_{\overline{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overline{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overline{AB}} = \mathcal{S}_t .$$

54. Neka su p, q, r tri prave koje nisu iz istog pramena i A tačka neke ravni. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku A i takvu da je $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(s)=s'$ i $s\|s'$.

55. Ako neka ograničena figura ima tri ose refleksije dokazati da se one seku u jednoj tački.

56. Dokazati da središta duži, čije su krajnje tačke odgovarajući parovi neke indirektne izometrije, pripadaju jednoj pravoj. (*Teorema Šal-Hjelmsleva*[37])

57. Neka su ABC i $A'B'C'$ dva podudarna suprotno orijentisana trougla. Dokazati da središta duži AA', BB', CC' pripadaju jednoj pravoj.

58. Neka je A tačka i p prava neke ravni. Dokazati da središta svih duži X_iY_i, gde su X_i tačke prave p a trouglovi AX_iY_i su pravilni i isto orijentisani, pripadaju jednoj pravoj.

59. Ako je Φ *ograničena figura* ravni dokazati da Φ ne može imati dva različita centra rotacija, tj. ako je $\mathcal{R}_{A,\alpha}(\Phi)=\mathcal{R}_{B,\beta}(\Phi)=\Phi$, mora biti $A=B$.

60. Jedine moguće izometrije koje ograničenu figuru Φ preslikavaju u sebe su:

    rotacije sa istim centrom S,

    osne refleksije čije ose sadrže tačku S.[38]

---

[37] *M. Šal* (1793-1880), francuski geometričar; *J. T. Hjelmslev* (1873-1950) finski pesnik i matematičar.

[38] Čuveni italijanski slikar, arhitekta i pronalazač *Leonardo da Vinči* (1452-1519), proučavao je moguće simetrije centralne građevine i mogući raspored kapela oko nje, tako da se ta simetrija ne naruši. U današnjim terminima taj rezultat iskazujemo kao

teoremu Leonarda da Vinčija: Jedine konačne grupe izometrija ravni su ciklična grupa C_n i diedarska grupa D_n. Napomenimo još da grupa simetrija ograničenih figura ne mora biti konačna; npr. grupa simetrija kruga.

Glava VIII

Sličnost

8.1 Razmera duži. Talesova teorema

U četvrtoj glavi razmatrali smo količnike kolinearnih vektora. Pri tom smo pomenuli i meru u skupu kolinearnih vektora, odnosno duži na međusobno paralelnim pravcima.

Sada ćemo definisati meru duži, na skupu $\mathcal{D}$ duži čitavog prostora.

Definicija. Neka je $\mathcal{D}$ skup svih duži i $\boldsymbol{R}^+$ skup pozitivnih realnih brojeva.

Preslikavanje $m: \mathcal{D} \to \boldsymbol{R}^+$ sa svojstvima:

(*i*) $(\exists A_0B_0 \in \mathcal{D})\ m(A_0B_0)=1$,

(*ii*) $(\forall AB, CD \in \mathcal{D})\ (AB \cong CD \Rightarrow m(AB)=m(CD))$,

(*iii*) $(\forall AB, CD, EF \in \mathcal{D})\ (AB+CD=EF \Rightarrow m(AB)+m(CD)=m(EF))$,

naziva se *mera* ili *dužina duži*, a $\mathcal{M}=(\mathcal{D}, \boldsymbol{R}^+, m)$ je *sistem merenja*.

Duž A_0B_0 je *jedinica mere* ili *jedinična duž*.

Intuitivno je jasno da postoji beskonačno mnogo sistema merenja, kao i to da je sistem merenja jednoznačno određen sa jediničnom duži. U tom smislu, mera neke duži AB, u određenom sistemu merenja, biće prikazana brojem x, koliko se puta jedinična duž e "sadrži" u duži AB, tj. $m(AB)=x$; ako taj broj nije prirodan, onda se ostatak "meri" redom sa $\frac{e}{10}, \frac{e}{100}, \cdots$ jer meru zapisujemo u dekadnom sistemu[39].

[39] *Stari Grci* su meru, u tom smislu, zamišljali kao uvek racionalan broj, pa su zato ivicu i dijagonalu kvadrata nazivali *nesamerljivim veličinama*.

Naredne dve teoreme navodimo bez dokaza:

Teorema 1. Za proizvoljne dve duži AB i CD važi:

(i) $AB<CD \Rightarrow m(AB)<m(CD)$;

(ii) $m(AB)=m(CD) \Rightarrow AB\cong CD$.

Teorema 2. Neka je $m: \mathcal{D} \to \boldsymbol{R}^+$ mera duži. Tada je funkcija $m_1: \mathcal{D} \to \boldsymbol{R}^+$ takođe mera, ako i samo ako postoji realan broj $\lambda\neq 0$, takav da za svaku duž AB važi $m_1(AB)=\lambda m(AB)$.

Sada smo u mogućnosti da uvedemo sledeći važan pojam:

Definicija. Ako je $x=m(AB)$ i $y=m(CD)$ u nekom sistemu merenja $\mathcal{M}$, količnik $x:y$ naziva se *razmera duži AB* i CD, u oznaci $AB:CD$ ili $\dfrac{AB}{CD}$.

Naredna teorema je direktna posledica teoreme 2.

Teorema 3. Razmera duži ne zavisi od sistema merenja.

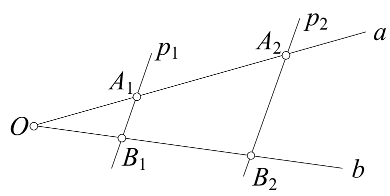
Definicija. Jednakost dve razmere naziva se *proporcija* ili *srazmera*. Duži a, b i c, d tim redom su *proporcionalne* ili *srazmerne* ako važi $a:b=c:d$.

Proporcija figuriše u već navedenoj i dokazanoj Talesovoj teoremi, direktnoj i obratnoj (glava 4). Napomenimo opet da su u takvoj formulaciji Talesove teoreme mere na neparalelnim pravcima mogle biti i različite. Ako prihvatimo zajedničku meru za skup $\mathcal{D}$ svih duži, možemo preformulisati Talesovu teoremu, time što ćemo izostaviti vektorske oznake. Naime, tada će za kolinearne vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ biti $\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}\right| = \dfrac{AB}{CD}$,

pa iz $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}$ sledi $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$, ali ne važi i obratno. Tako, iz vektorskog oblika Talesove teoreme (direktne i obratne) zadržavamo samo direktni smer.

Teorema 3. (*Talesova teorema*) Ako se prave a i b seku u tački O i prave p_1 i p_2 seku pravu a u tačkama A_1 i A_2, odnosno pravu b u tačkama B_1 i B_2, tada važi:

$$p_1 \| p_2 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_1}{OB_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2}.$$



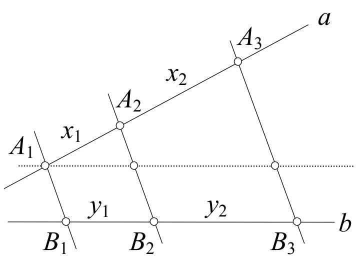
Navedimo neke neposredne posledice Talesove teoreme:

Posledica 1. Ako važe sve pretpostavke Talesove teoreme (u istim oznakama) tada je: $\frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$.

Prethodna posledica ne može se iskazati u vektorskom obliku, jer vektori $\overrightarrow{OA_1}$ i $\overrightarrow{OB_1}$ nisu kolinearni.

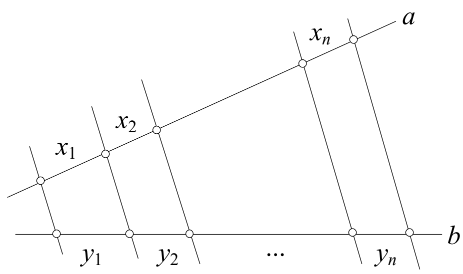
Napomenimo još, da razmere iz prethodne posledice nisu u opštem slučaju jednake razmeri $\frac{A_1B_1}{A_2B_2}$.

Posledica 2. Ako paralelne prave p_1, p_2, p_3 seku pravu a u tačkama A_1, A_2, A_3 i pravu b u tačkama B_1, B_2, B_3, tada je $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3}$ i $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.



$x_1{:}x_2{=}y_1{:}$

$x_1{:}y_1{=}x_2{:}$



$x_1{:}y_1{=}x_2{:}y_2{=}...{=}x_n{:}$

$x_1{:}x_2{:}\ ...\ {:}x_n = y_1{:}y_2{:}\ ...\ {:}y_n$

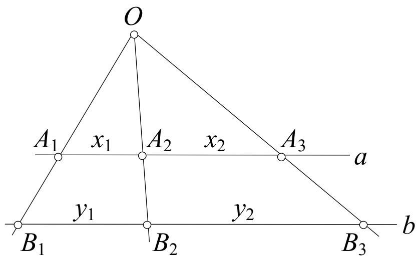
Posledica 3. Ako paralelne prave p_1, p_2,..., p_n seku pravu a u tačkama A_1,A_2,...,A_n i pravu b u tačkama B_1,B_2,...,B_n, tada je:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\cdots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} \text{ i}$$

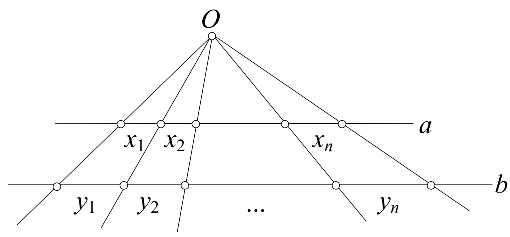
$$A_1A_2:A_2A_3:\cdots:A_{n-1}A_n = B_1B_2:B_2B_3:\cdots:B_{n-1}B_n.$$

Posledica 4. Ako se prave p_1, p_2, p_3 seku u tački O i paralelne prave a i b seku p_1 u A_1 i B_1, p_2 u A_2 i B_2, p_3 u A_3 i B_3 tada važi:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3} \quad\text{i}\quad \frac{A_1A_2}{A_2A_3}=\frac{B_1B_2}{B_2B_3}.$$



$x_1{:}y_1{=}x_2{:}$
$x_1{:}x_2{=}y_1{:}$



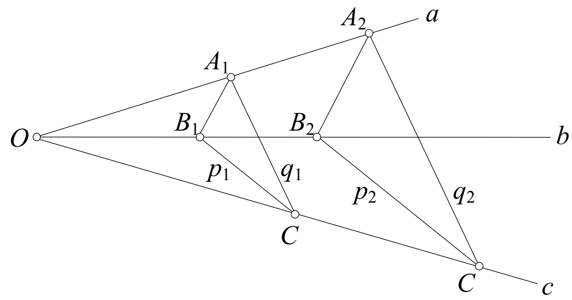
$x_1{:}y_1{=}x_2{:}y_2{=}...{=}x_n{:}$
$x_1{:}x_2{:}\ ...\ {:}x_n = y_1{:}y_2{:}\ ...\ {:}y_n$

Posledica 5. Ako su p_1, p_2, ..., p_n prave pramena $\mathcal{X}_O$, koje seku paralelne prave a i b redom u tačkama A_1 i B_1, A_2 i B_2, ..., A_n i B_n, tada važi:

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}=\frac{A_2A_3}{B_2B_3}=\cdots=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n} \text{ i}$$

$$A_1A_2:A_2A_3:\cdots:A_{n-1}A_n = B_1B_2:B_2B_3:\cdots:B_{n-1}B_n.$$

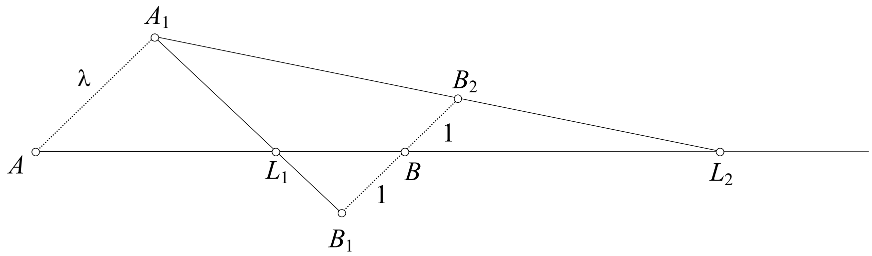
Posledica 6. Ako su a, b, c prave pramena $\mathcal{X}_O$, p_1 i p_2 paralelne prave koje seku prave b i c u tačkama B_1, C_1 odnosno B_2 i C_2, a q_1 i q_2 paralelne prave koje seku prave a i c u tačkama A_1, C_1 odnosno A_2 i C_2 , tada je $A_1B_1 \| A_2B_2$.



Prethodna posledica može se uopštiti i za slučaj n-touglova $A_1A_2...A_n$ i $A'_1A'_2...A'_n$.

Dokazi posledica 1-5 su neposredni. U dokazu posledice 6, koristi se obratna Talesova teorema.

Teorema 4. Ako su A i B dve razne tačke prave p i $\lambda \neq -1$ realan broj, tada postoji jedinstvena tačka L prave p za koju je $\dfrac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LB}} = \lambda$.



Dokaz: U slučaju $\lambda=0$, dokaz je neposredan. Neka je $\lambda>0$. Jasno je da za traženu tačku L mora biti $\mathcal{B}(A,L,B)$. Konstruišimo dve proizvoljne paralelne prave a i b koje sadrže tačke A i B i na njima, u raznim poluravnima sa rubom AB, tačke A_1 i B_1 takve da je $m(AA_1)=\lambda$ i $m(BB_1)=1$. Sa L_1 označimo presečnu tačku pravih AB i A_1B_1. Na osnovu Talesove teoreme je:

$\dfrac{\overrightarrow{AL_1}}{\overrightarrow{L_1B}} = \dfrac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{B_1B}} = \lambda$, odnosno $m(AL_1)=k\lambda$ i $m(L_1B)=k$, za neko $k>0$.

Dokaz da je da je tačka L_1 jedinstvena ovde izostavljamo.* ❑

Na osnovu prethodne teoreme možemo zaključiti da za $\lambda>1$ i $\lambda\neq 1$ postoje tačno dve tačke L takve da je $\dfrac{AL}{LB} = \lambda$. (U slučaju $\lambda=1$ to je središte duži.) Takođe, ako je poznata jedna od te dve tačke, moguće je konstruisati drugu.

Definicija. Tačka L deli duž AB u *odnosu* (*razmeri*) $\lambda\neq-1$ ako je $\dfrac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LB}}=\lambda$. Ta podela je *unutrašnja* ako je $\lambda>0$ (tada je tačka L unutar duži AB), odnosno *spoljašnja* ako je $\lambda<0$ (tada je tačka L van duži AB). U oba slučaja koristi se oznaka $\lambda=\mathcal{R}(A,B;L)$.

Ako su L_1 i L_2 tačke definisane u dokazu teoreme 4, možemo zaključiti da je tada: $\mathcal{R}(A,B;L_1):\mathcal{R}(A,B;L_2)=\dfrac{\overrightarrow{AL_1}}{\overrightarrow{L_1B}}:\dfrac{\overrightarrow{AL_2}}{\overrightarrow{L_2B}}=-1$. Sada je prirodno uvesti sledeće pojmove:

Dvorazmera ili *složena razmera* u oznaci $\mathcal{R}(A,B;C,D)$ je količnik dve odgovarajuće razmere tj. $\mathcal{R}(A,B;C,D)=\mathcal{R}(A,B;C):\mathcal{R}(A,B;D)=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$.

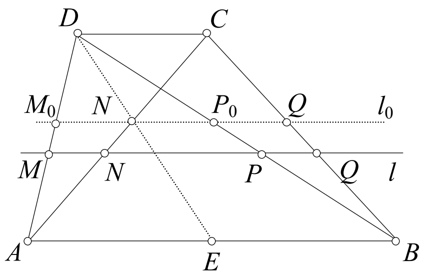
Ako je $\mathcal{R}(A,B;C,D)$=-1, dvorazmera se naziva *harmonijska*. U tom slučaju kažemo da tačke A,B,C,D čine *harmonijsku četvorku* ili da je par tačaka A,B *harmonijski spregnut* sa parom tačaka C,D, u oznaci $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

Dakle za četiri razne kolinearne tačke A,B,C,D je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ akko je $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=-1$. Uvedimo još jedan pojam koji ćemo koristiti kasnije.

Definicija. Neka su S, A, B kolinearne tačke. Izraz $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ jednak je $SA\cdot SB$ (proizvod dužina) odnosno $-SA\cdot SB$ u zavisnosti da li nije ili jeste $\mathcal{B}(A,S,B)$.

> ***Primer.*** Dokazati da neparalelne ivice i dijagonale trapeza određuju na pravoj koja je paralelna osnovicama tri duži, od kojih su krajnje dve podudarne. Konstruisati takvu paralelu uz dodatni uslov da tri pomenute duži budu podudarne.

Rešenje: Neka prava l, paralelna osnovici AB trapeza $ABCD$, seče ivice AD,BC i dijagonale AC,BD redom u tačkama M,Q,N,P. Na osnovu Talesove teoreme je $MN:DC=MA:DA$, odnosno $PQ:DC=BQ:BC$. Kako je prema posledici 2, $MA:AD=BQ:BC$, mora biti i $MN:DC=PQ:DC$ tj. $MN=PQ$.



Ako je E središte osnovice AB i N_0 presečna tačka pravih DE i AC traženu pravu l_0 možemo konstruisati kao pravu koja sadrži tačku N_0 i paralelna je sa pravom AB. Zaista, ako su M_0, P_0, Q_0 preseci prave l_0 sa pravama AD, BD, CB, tada je $M_0N_0 \cong N_0P_0$, na osnovu četvrte posledice Talesove teoreme.

Zadaci

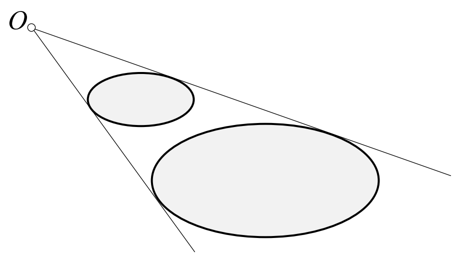
1. Datu duž AB podeliti na:
   (i) pet podudarnih duži;
   (ii) delove koji su u odnosu 2:3;
   (iii) delove koji su u odnosu $2:\frac{1}{2}:1$.
2. Date su tri duži a, b, c. Konstruisati duž x ako važi:
   (i) $a:b=c:x$; (ii) $x=\frac{a^2}{b}$; (iii) $(x+c):(x-c)=7:2$.
3. Neka su M i N dve tačke na kraku OX i P tačka na kraku OY ugla XOY. Ako je $NQ \| MP$ i $PN \| QS$ ($Q \in OY$, $S \in OX$), dokazati da je $ON^2=OM \cdot OS$ (takva duž ON naziva se *geometrijska sredina* duži OM i OS).
4. Neka su a, b, c tri poluprave sa zajedničkom početnom tačkom S i M tačka na polupravoj a. Ako se tačka M "kreće" po polupravoj a, dokazati da je odnos rastojanja ove tačke od pravih b i c stalan. Da li tvrđenje važi i ako su poluprave:
   (i) nekomplanarne; (ii) nekonkurentne.

5. Neka su F i G tačke u kojima prava koja sadrži tačku D, ivice BC trougla ABC, i paralelna je težišnoj duži AA_1, seče prave AB i AC. Dokazati da zbir $DF+DG$ ostaje stalan ako se tačka D "kreće" po ivici BC.

8.2 Homotetija

Definicija. Neka je O tačka i k realan broj različit od nule. Transformacija kojom se proizvoljna tačka X preslikava u tačku X' takvu da je $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$, naziva se *homotetija* ili *perspektivna sličnost*, u oznaci $\mathcal{H}_{O,k}$ sa *centrom* O i *koeficijentom* k. Dve figure su *homotetične* ako postoji homotetija koja jednu figuru preslikava u drugu.

Neposredno sleduju prva svojstva ove nove geometrijske transformacije. Najpre, lako se dokazuje da je homotetija bijekcija i da je jednoznačno određena svojim centrom i koeficijentom. Dokazi naredne dve teoreme su takođe jednostavni i prepuštamo ih čitaocu.

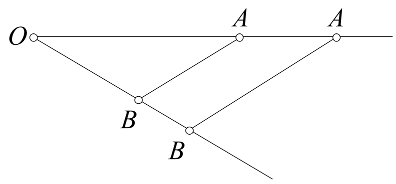


Teorema 1. $\mathcal{H}_{O,1}=\mathcal{E}$, $\mathcal{H}_{O,-1}=\mathcal{S}_O$.

Teorema 2. Ako je $k\neq 1$, jedina fiksna tačka homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ je njen centar.

Teorema 3. Za duž AB i njenu sliku $A'B'$ pri homotetiji $\mathcal{H}_{O,k}$ važi: $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Dokaz: Iz $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$, oduzimanjem prve jednakosti od druge dobijamo $\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}$, odatle je na osnovu Talesove teoreme $\overrightarrow{A'B'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, tj. $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. ❑



Teorema 4. (i) Homotetija svaku pravu preslikava u njoj paralelnu pravu.
(ii) Svake dve paralelne prave su homotetične.
(iii) Jedine invarijantne prave homotetije $\mathcal{H}_{O,k}$ (za $k\neq 1$) su one koje sadrže centar homotetije.

Dokaz: (i) je direktna posledica prethodne teoreme. (ii), (iii) prepuštamo čitaocu. ❑

Teorema 5. Homotetična slika ugla je ugao, i to njemu podudaran ugao.

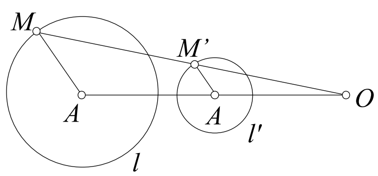
Dokaz: Posledica prethodne teoreme i teoreme o uglovima sa paralelnim kracima. ❑

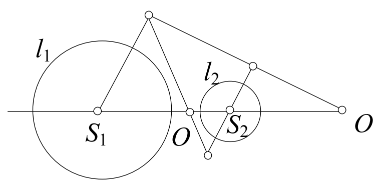
Narednu teoremu dajemo bez dokaza.

Teorema 6. Homotetija $\mathcal{H}_{O,k}$ u ravni je direktna transformacija

Napomenimo da se ovde pojam direktne i indirektne transformacije može uvesti kao kod izometrija.

Teorema 7.* Homotetija preslikava krug u krug, i obratno svaka dva kruga su homotetična.

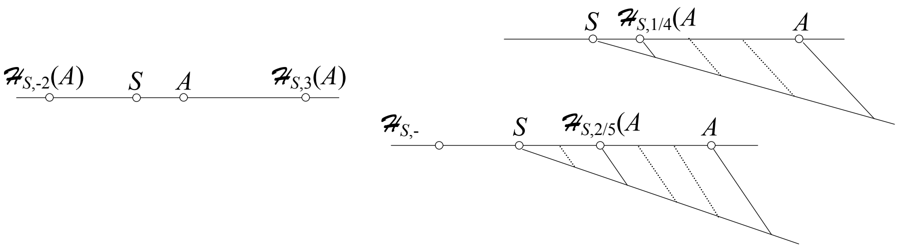




Lako se dokazuje da zajedničke tangente krugova iz prethodne teoreme sadrže centre pomenutih homotetija.

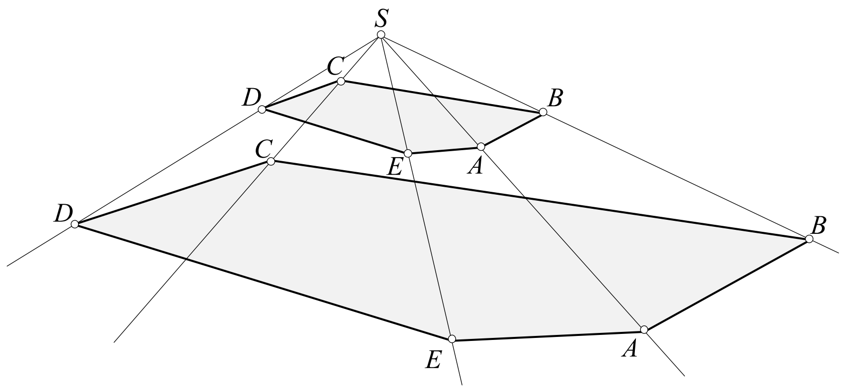
Primer 1. Neka su S, A dve tačke ravni. Konstruisati $\mathcal{H}_{S,k}(A)$ ako je

$$k \text{ jednako: } (i)\ 3;\ (ii)\ \frac{1}{4};\ (iii)\ \text{-}2;\ (iv)\ -\frac{2}{5}.$$



Rešenje: Slučajevi (i) i (iii) su jednostavni. U slučajevima (ii), (iv) konstrukciju izvodimo koristeći Talesovu teoremu. ❑

Primer 2. Konstruisati sliku petougla $ABCDE$ u homotetiji $\mathcal{H}_{S,k}$.



Rešenje: Najpre konstruišemo A', sliku tačke A, na isti način kao u prethodnom primeru. Zatim koristeći teoremu 4, konstruišemo slike preostalih temena. Npr. $B'=SB\cap l$, gde je l prava koja sadrži tačku A' i paralelna je pravoj AB. ❑

Teorema 8.* Neka su $\mathcal{H}_{O,k}$, $\mathcal{H}_{O,k'}$ dve homotetije sa istim centrom. Tada je:

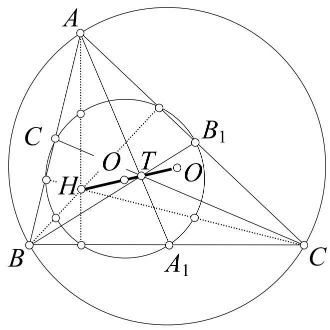
(i) $\mathcal{H}_{O,k'} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,kk'}$.

(ii) $(\mathcal{H}_{O,k})^{-1} = \mathcal{H}_{O,1/k}$.

(iii) $\mathcal{H}_{O,k'} \circ \mathcal{H}_{O,k} = \mathcal{H}_{O,k} \circ \mathcal{H}_{O,k'}$.

U prethodnoj teoremi dokazali smo zapravo da sve homotetije sa istim centrom čine komutativnu grupu u odnosu na slaganje preslikavanja.

> ***Primer 3.*** Dokazati da je poluprečnik Ojlerovog kruga trougla jednak polovini poluprečnika opisanog kruga tog trougla, i da je njegov centar središte duži čije su krajnje tačke ortocentar i centar opisanog kruga tog trougla[40].



Rešenje: Neka je T težište trougla ABC i AA_1, BB_1, CC_1 njegove težišne duži. Ojlerov krug opisan je oko trougla $A_1B_1C_1$ (primer 2, odeljak 3.8). Ako je $k=-\frac{1}{2}$, homotetijom $\mathcal{H}_{T,k}$ se trougao ABC preslikava u trougao $A_1B_1C_1$. Dakle, tom homotetijom se krug opisan oko trougla ABC preslikava u Ojlerov krug, pa je poluprečnik Ojlerovog dva puta manji od poluprečnika prvog kruga. Centar Ojlerovog kruga je tačka $O_1 = \mathcal{H}_{T,k}(O)$, za koju je dakle $O_1T{:}TO=1{:}2$. Na osnovu primera iz odeljka 4.4 (Ojlerova prava), je $HT{:}TO=2{:}1$. Na osnovu prethodne dve relacije izvodimo krajnji zaključak. ❑

Zadaci

1. Neka je S tačka van pravih p i q i m, n duži neke ravni. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave p i q u tačkama P i Q takvim da je $SP{:}SQ=m{:}n$.

2. Neka su p, q, r tri konkurentne prave, S tačka van njih i m, n duži neke ravni. Konstruisati pravu s koja sadrži tačku S i seče prave p, q, r u tačkama P, Q, R takvim da je $PQ{:}QR=m{:}n$.

3. Konstruisati :

---

[40] Ojlerov krug naziva se u literaturi i *Ponseleov krug* po francuskom geometričaru *Ž. V. Ponseleu* (1788-1867), koji je 1821. g. dokazao navedeno tvrđenje.

(i) romb, ako je data ivica i odnos dijagonala;
(ii) trapez, ako su data dva ugla na jednoj osnovici, odnos osnovice i visine, a druga osnovica podudarna datoj duži.

4. Neka je A tačka u uglu pOq, l prava i α ugao neke ravni. Konstruisati trougao APQ, čija temena P i Q pripadaju kracima p i q, $\angle PAQ \cong \alpha$ i $PQ \| l$.
5. Konstruisati krug l koji dodiruje dati krug k i datu pravu p ako je data tačka dodira: (i) l i p; (ii) l i k.
6. Konstruisati krug koji dodiruje krake ugla pOq i:
   (i) sadrži datu tačku;
   (ii) dodiruje dati krug.

8.3 Transformacije sličnosti. Sličnost figura

Na isti način, kao što su nam izometrijske transformacije bile potrebne za uvođenje podudarnosti, tako ćemo sada najpre definisati transformacije sličnosti radi uvođenja pojma sličnosti figura.

Definicija. Neka je k realan pozitivan broj. *Transformacija sličnosti* sa *koeficijentom* k prostora E^n je bijektivna transformacija $\mathcal{P}: E^n \to E^n$; $n \in \{1,2,3\}$, takva da svake dve tačke A, $B \in E^n$ preslikava u tačke A', B' takve da važi $A'B' = kAB$.

Izometrijske transformacije prostora E^n su specijalan slučaj transformacija sličnosti za $k=1$.

Teorema 1.* Neka je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora E^n i neka su A',B',C' odgovarajuće slike tačaka A,B,C prostora E^n. Tada važi:

$$\mathcal{B}(A,B,C) \Rightarrow \mathcal{B}(A',B',C').$$

Na osnovu prethodne teoreme, možemo zaključiti da transformacije sličnosti "čuvaju" kolinearnost tačaka, kao i da preslikavaju pravu u pravu, duž u duž, ugao u ugao itd.

Dokaz sledeće teoreme je neposredan.

Teorema 2. Neka je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti prostora E^n i A',B',C',D' slike tačaka A,B,C,D, redom:

(i) Ako je $AB\cong CD$, tada je i $A'B'\cong C'D'$.

(ii) $AB:CD=A'B':C'D'$.

Lako se dokazuje da je kompozicija dve transformacije sličnosti sa koeficijentima k i k_1, transformacija sličnosti sa koeficijentom sličnosti $k\cdot k_1$. Takođe je inverzna transformacija transformacije sličnosti sa koeficijentom k, transformacija sličnosti sa koeficijentom $1/k$.

Može se dokazati da kao kod izometrija postoje dve vrste transformacija sličnosti: direktne i indirektne transformacije sličnosti. Direktne transformacije sličnosti su one koje preslikavaju figure u jednako orjentisane figure. Indirektne transformacije sličnosti su one koje prevode figure u suprotno orjentisane figure. Jasno je da kompozicija dve direktne ili dve indirektne transformacije sličnosti predstavlja direktnu transformaciju sličnosti. Kompozicija direktne i indirektne transformacije sličnosti je indirektna transformacija sličnosti.

Teorema 3. Homotetija $\mathcal{H}_{S,k}$ je transformacija sličnosti sa koeficijentom $|k|$.

Dokaz: Neka su A' i B' slike proizvoljnih tačaka A i B u homotetiji $\mathcal{H}_{S,k}$. Tada je na osnovu teoreme 3, iz odeljka 8.2, $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$. Stoga je $A'B':AB=|k|$. ❑

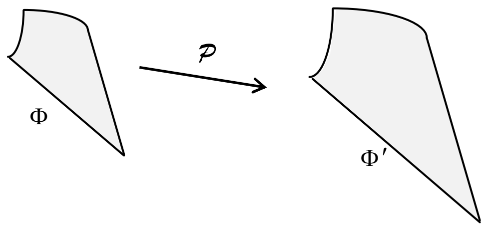
Na osnovu prethodne teoreme, sledi da kompozicija homotetije i izometrije predstavlja transformaciju sličnosti. Važi međutim i sledeće tvrđenje.

Teorema 4. Svaka transformacija sličnosti može se predstaviti kao kompozicija
jedne homotetije i jedne izometrije.

Dokaz: Neka je $\mathcal{P}$ proizvoljna transformacija sličnosti sa koeficijentom k. Ako sa $\mathcal{H}_{S,1/k}$ označimo homotetiju sa proizvoljnim centrom S i koeficijentom $1/k$, tada kompozicija $\mathcal{H}_{S,1/k}\circ\mathcal{P}$ predstavlja takođe transformaciju sličnosti sa koeficijentom $k\cdot 1/k=1$. Dakle, to je neka izometrija $\mathcal{I}$ za koju je $\mathcal{H}_{S,1/k}\circ\mathcal{P}=\mathcal{I}$. Na osnovu prethodne relacije i teoreme 8, iz odeljka 8.2, je $\mathcal{P}=\mathcal{H}_{S,k}\circ\mathcal{I}$. ❑

Kako homotetija i izometrija svaki ugao preslikavaju u njemu podudaran, na osnovu prethodne teoreme, sledi da to važi i za proizvoljnu transformaciju sličnosti.

Definicija. Kažemo da je u prostoru E^n ; $n \in \{1,2,3\}$ figura Φ *slična* figuri Φ', u oznaci Φ~Φ', ako postoji transformacija sličnosti $\mathcal{P}$ tog prostora takva da je $\mathcal{P}(\Phi)=\Phi'$. Koeficijent sličnosti transformacije $\mathcal{P}$ je *koeficijent sličnosti* figura Φ i Φ'.



Teorema 5.* Relacija sličnosti figura je relacija ekvivalencije.

U narednim odeljcima razmatraćemo samo sličnost figura u ravni, pa ćemo to podrazumevati uvek kada to nije precizirano.

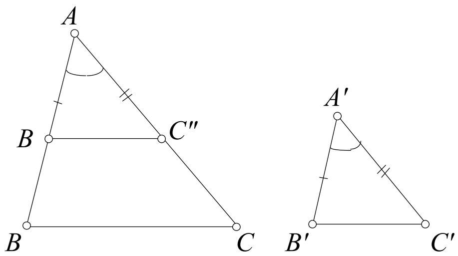
8.4 Sličnost trouglova

Kao i kod podudarnosti, sličnost trouglova[41] često nije jednostavno dokazati direktno na osnovu definicije. Tako, analogno stavovima o podudarnosti trouglova, postoje i stavovi o sličnosti trouglova.

Na osnovu razmatranja iz prethodne glave, ako su dva trougla slična tada su im uglovi podudarni i odgovarajuće ivice proporcionalne. Naredni stavovi su u vezi sa time koji od tih uslova su dovoljni za njihovu sličnost.

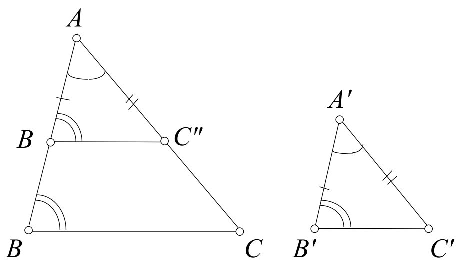
Stav 1. Dva trougla su slična ako su dve ivice jednog trougla srazmerne sa odgovarajućim ivicama drugog trougla, a uglovi zahvaćeni tim ivicama podudarni.

[41] Koristeći sličnost jednakokrako-pravouglih trouglova, *Tales iz Mileta* (*VII-VI* v. pre n. e.) izračunao je visinu Keopsove piramide.



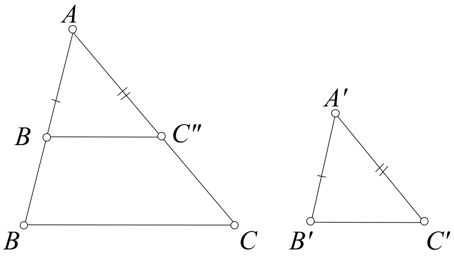
Dokaz: Neka su trouglovi ABC i $A'BC'$ takvi da važe uslovi: $A'B':AB=A'C':AC(=k)$ i $\angle A\cong\angle A'$. Neka su B'' i C'' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB''\cong A'B'$ i $AC''\cong A'C'$. Tada je $\Delta AB''C''\cong\Delta A'B'C'$ (SUS). Dakle, postoji izometrija $\mathcal{T}$ takva da je $\mathcal{T}(\Delta AB''C'')=\Delta A'B'C'$. Kako za homotetiju $\mathcal{H}_{A,k}$ važi $\mathcal{H}_{A,k}(\Delta ABC)=\Delta AB''C''$, zaključujemo da transformacija sličnosti $\mathcal{T}\circ\mathcal{H}_{A,k}$ preslikava trougao ABC u trougao $A'B'C'$, pa je $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$. ❑

Stav 2. Dva trougla su slična ako su dva ugla jednog trougla podudarna sa odgovarajućim uglovima drugog trougla.



Dokaz: Neka su ABC i $A'B'C'$ trouglovi sa dva para odgovarajućih podudarnih uglova. Tada su i uglovi trećeg para me|u sobom podudarni. Neka je $k=A'B':AB$ i neka su B'' i C'' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB''\cong A'B'$ i $AC''\cong A'C'$. Tada je $k=AB'':AB$. Takođe, trouglovi $A'B'C'$ i $AB''C''$ su podudarni (SUS), pa je $\angle C''B''A\cong\angle C'B'A'\cong\angle CBA$. Na osnovu toga je $B''C''\parallel BC$. Tada homotetija $\mathcal{H}_{A,k}$ slika trougao ABC u trougao $AB''C''$ i trougao $AB''C''$ nekom izometrijom $\mathcal{T}$ u trougao $A'B'C'$. Dakle, transformacija sličnosti $\mathcal{T}\circ\mathcal{H}_{A,k}$ slika trougao ABC u trougao $A'B'C'$, pa su oni slični. ❑

Stav 3. Dva trougla su slična ako su sve ivice jednog trougla srazmerne sa odgovarajućim ivicama drugog trougla.

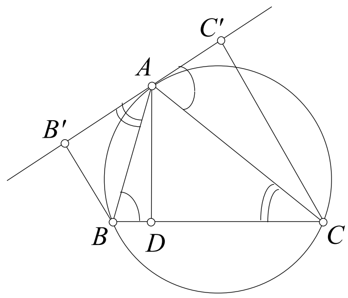


Dokaz: Neka su ABC i A'B'C' trouglovi takvi da je: $A'B':AB=A'C':AC=B'C':BC=k$ i neka su B'' i C'' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB''\cong A'B'$ i $AC''\cong A'C'$. Tada je $k=AB'':AB=AC'':AC$. Na osnovu obratne Talesove teoreme je tada $B''C''\|BC$, pa je dalji deo dokaza sličan kao u prethodnoj teoremi. ❑

Dokaz poslednjeg stava ćemo izostaviti.

Stav 4. Dva trougla su slična ako su dve ivice jednog trougla srazmerne odgovarajućim ivicama drugog trougla, uglovi naspram dveju od tih odgovarajućih ivica podudarni, a naspram drugih dveju ivica uglovi su ili oba oštra, ili oba tupa, ili oba prava.

Primer. Neka je k krug opisan oko trougla ABC Ako su B', C' podnožja upravnih iz temena B i C na tangenti kruga k u temenu A, dokazati da je visina AD tog trougla geometrijska sredina duži BB' i CC' tj. $AD = \sqrt{BB'\cdot CC'}$.



Rešenje: Ugao BAB' podudaran je periferijskom uglu nad tetivom AB tj. $\angle BAB'\cong\angle ACD$. Kako su i uglovi $AB'B$ i CDA podudarni kao pravi, na osnovu stava 2, je $\Delta AB'B\sim\Delta CDA$. Tada je $AD:BB'=AC:BA$ (1). Na isti način dokazujemo i da je $\Delta AC'C\sim\Delta BDA$ i zatim $CC':AD=AC:BA$ (2). Iz relacija (1) i (2) sledi $AD:BB'=CC':AD$, odnosno $AD = \sqrt{BB'\cdot CC'}$.

Zadaci

1. Ako je N središte luka BC kruga opisanog oko trougla ABC, na kojem nije tačka A, a E presečna tačka prave AN sa ivicom BC, dokazati da je: $\Delta ABN\sim\Delta BEN$.

2. Neka je $ABCD$ paralelogram. Ako su E i F tačke u kojima krug opisan oko trougla ABC seče prave AD i CD, dokazati da je $\Delta EBC \sim \Delta EFD$.
3. Ako su AA' i BB' visine oštrouglog trougla ABC, dokazati da je $\Delta ABC \sim \Delta B'A'C$.
4. Ako prava određena visinom AD trougla ABC dodiruje opisani krug tog trougla, dokazati da je $AD^2 = BD \cdot CD$.
5. Ako je kod trougla ABC unutrašnji ugao kod temena A dva puta veća od unutrašnjeg ugla kod temena B, dokazati da među ivicama tog trougla važi relacija $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$.
6. Dokazati da su kod sličnih trouglova poluprečnici upisanih krugova proporcionalni odgovarajućim ivicama.

8.5 Harmonijska spregnutost parova tačaka. Apolonijev krug

U odeljku 8.1 uveli smo pojam harmonijske četvorke tačaka: ako su A,B,C,D četiri razne kolinearne tačke i

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = -1,$$

kažemo da je par tačaka A,B harmonijski spregnut sa parom tačaka C,D u oznaci $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Harmonijska spregnutost ima veliki značaj, ne samo u tzv. projektivnoj geometriji, gde joj je uloga jedna od osnovnih, već i u elementarnoj euklidskoj geometriji.

Dokažimo neka osnovna svojstva ove relacije:

Teorema 1. Ako tačka C prave AB nije središte duži AB, tada postoji jedinstvena tačka D takva da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

Dokaz: Direktna posledica teoreme 4, iz odeljka 8.1. ❑

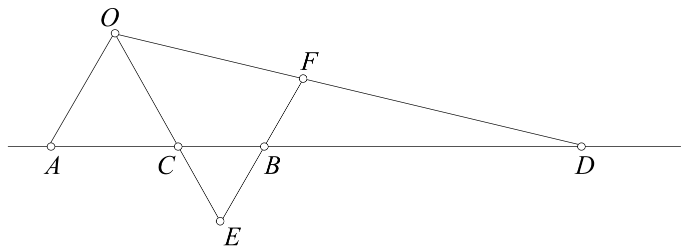
Teorema 2. Ako su A,B,C,D četiri tačke pri čemu je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, tada je i:

$$\mathcal{H}(A,B;D,C),\quad \mathcal{H}(C,D;A,B).$$

Dokaz: Iz $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, sledi $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=-\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, tj. $\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=-\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$, pa važi $\mathcal{H}(A,B;D,C)$. S druge strane iz $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=-\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ sledi i $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AD}}=-\dfrac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BD}}$, tj. $\mathcal{H}(C,D;A,B)$. ❑

Teorema 3. Ako su A,B,C,D četiri razne kolinearne tačke neke prave p, O tačka van te prave, a E i F tačke u kojima prava kroz tačku B paralelna sa pravom OA seče prave OC i OD, tada je:

$$\mathcal{H}(A,B;C,D) \Leftrightarrow \mathcal{S}_B(E)=F.$$



Dokaz: $\Rightarrow$. Ako je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, tada je prema Talesovoj teoremi:

$$\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{EB}}=\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=-\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=-\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{FB}}\text{, pa je } \overrightarrow{FB}=-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BE}\text{, tj. } \mathcal{S}_B(E)=F.$$

$\Leftarrow$. Neka je $\mathcal{S}_B(E)=F$, tada je:

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{EB}}=-\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{FB}}=-\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}\text{, pa je po definiciji } \mathcal{H}(A,B;C,D).$$ ❑

Ustanovili smo da na pravoj AB postoje tačno dve tačke koje duž AB dele u odnosu m:n, gde su m i n dve nepodudarne duži. One predstavljaju unutrašnju i spoljašnju podelu duži u tom odnosu i definisali smo ih kao tačke harmonijski spregnute sa tačkama A i B. Postavlja se pitanje, a i od velikog je praktičnog značaja, šta predstavlja skup svih tačaka X ravni, takvih da je AX:XB=m:n. Odgovor daje sledeća teorema:

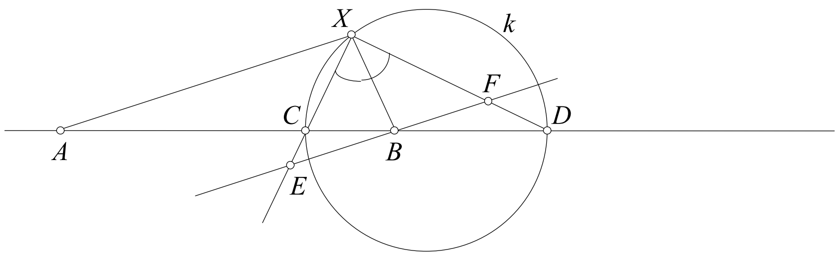
Teorema 4. (*O Apolonijevom*[42] *krugu*) Neka su A i B dve tačke i m i n dve nepodudarne duži neke ravni. Ako su C i D tačke prave AB takve da je $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{m}{n}$ tada je skup svih tačaka X te ravni takvih da je $\frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$, krug nad prečnikom CD.

Dokaz: Neka je k krug nad prečnikom CD. Neka je dalje, X proizvoljna tačka te ravni, p prava koja sadrži tačku B i paralelna je sa AX i E i F presečne tačke pravih XC i XD sa pravom p. Na osnovu prethodne teoreme, je tačka B središte duži EF, jer je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Potrebno je dokazati da je:

$AX{:}XB=m{:}n$ akko $X \in k$.

$\Leftarrow$. Neka je $X \in k$. Tada je ugao EXD prav, kao ugao nad prečnikom CD, pa je $BE \cong BX \cong BF$. Tada je na osnovu Talesove teoreme:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AX}{EB} = \frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$



$\Rightarrow$. Neka je $AX{:}XB=m{:}n$. Tada je $\frac{AX}{XB} = \frac{m}{n} = \frac{AC}{CB} = \frac{AX}{BE}$, pa je $XB \cong BE \cong BF$. Dakle, trougao EXB je pravougli. Odatle sledi, da je ugao CXD prav, tj. tačka X je na krugu k nad prečnikom CD. ❑

Krug iz prethodne teoreme naziva se *Apolonijev krug*.

Primer. Ako su E i F tačke u kojima bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena A trougla ABC seku pravu BC, dokazati da je:

(i) $BE{:}CE=BF{:}CF=AB{:}AC$,

[42] Starogrčki matematičar *Apolonije iz Perge* (*III-II* v. pre n. e.)

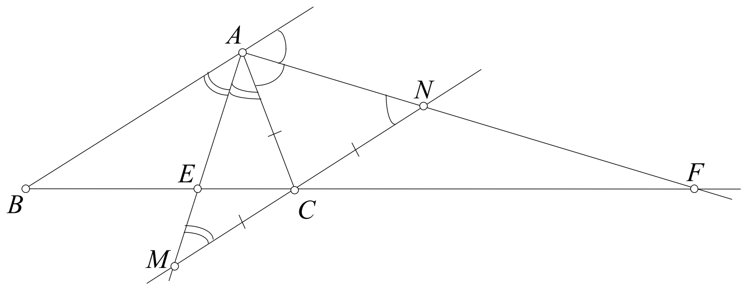
(*ii*) $\mathcal{H}(B,C;E,F)$

Rešenje: Označimo sa M i N tačke u kojima paralelna prava iz tačke C sa AB seče bisektrise unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla redom. Trouglovi AMC i ANC su jednakokraki (odgovarajući uglovi su podudarni, kao uglovi na transverzali). Iz toga i sličnosti trouglova ABE i MCE sledi:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{MC} = \frac{BE}{EC}.$$

Kako je trougao ABF homotetičan trouglu NCF važi:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{CN} = \frac{BF}{CF}.$$



(*ii*) Direktno na osnovu definicije harmonijske spregnutosti.

Zadaci

1. Neka su A, C, B tačke na pravoj p takve da C nije središte duži AB. Konstruisati tačku D na toj pravoj, koja je sa tačkom C harmonijski spregnuta u odnosu na tačke A i B.

2. Konstruisati tačku M iz koje se duži AC, CB, BD, koje pripadaju istoj pravoj, vide pod istim uglom, ako je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

3. Konstruisati trougao:
   (*i*) a, l_a, b:c, (*ii*) a, α, b:c, (*iii*) a, h_a, b:c.

4. Neka su A i B tačke van prave p neke ravni. Konstruisati tačku L na pravoj p takvu da je AL:LB=2:3.

8.6 Neke karakteristične teoreme

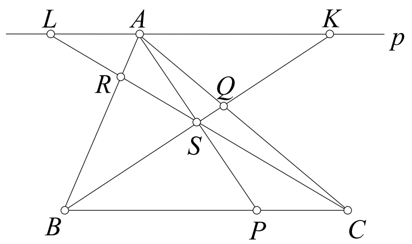
Dokazaćemo nekoliko značajnih teorema, koje su posledica stavova o sličnosti trouglova, i imaju široku primenu.

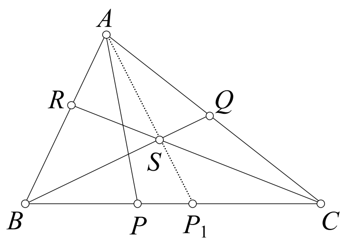
Teorema 1. (*Đ. Čeva*[43]) Neka su P, Q, R tačke pravih određenih ivicama BC, CA, AB trougla ABC. Tada važi ekvivalencija:

Prave AP, BQ, CR pripadaju jednom pramenu akko je $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1$.

Dokaz: $\underline{\Rightarrow}$. Neka se prave AP, BQ, CR seku u nekoj tački S (čitaocu prepuštamo slučaj kada su paralelne). Pravu koja sadrži tačku A, paralelnu sa pravom BC označimo sa p, a njene presečne tačke sa pravama BQ i CR označimo sa K i L. Tada je na osnovu Talesove teoreme (i njenih posledica):

$\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}=\dfrac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{AL}}$, $\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}=\dfrac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{KA}}$, $\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=\dfrac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{CB}}$. Iz tih jednakosti sledi: $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1$.





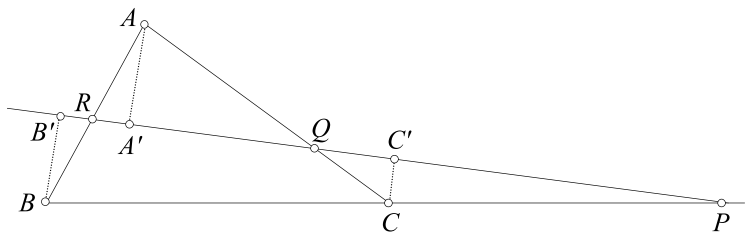
$\underline{\Leftarrow}$. Neka je $\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}=1$, i S presečna tačka pravih BQ i CR (slučaj kad su BQ i CR paralelne, opet prepuštamo čitaocu). Tada, ako je P_1 presek prave AS sa pravom BC, u odnosu na prave AP_1, BQ, CR možemo primeniti prvi deo dokaza (⇐), pa je $\dfrac{BP_1}{P_1C}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$. Na osnovu

[43] *Đ. Čeva* (1648-1734), italijanski matematičar, dokazao je ovo tvrđenje 1678. g.

pretpostavke je onda $\frac{\overrightarrow{BP_1}}{\overrightarrow{P_1C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ tj. P=P_1, pa se prave AP, BQ, CR seku u tački S. ❑

Teorema 2. (*Menelaj*[44]) Neka su P, Q, R tačke pravih određenih ivicama BC, CA, AB trougla ABC. Tada važi ekvivalencija:

Tačke P, Q, R su kolinearne akko je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.



Dokaz: $\Rightarrow$. Neka su P, Q, R tačke neke prave l. Sa A', B', C' označimo podnožja upravnih iz temena A, B, C tog trougla na pravoj l. Primenom Talesove teoreme izvodimo: $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \frac{\overrightarrow{BB'}}{\overrightarrow{C'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CC'}}{\overrightarrow{A'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{B'B}} = -1$.

.

$\Leftarrow$. Neka je sada $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Sa P_1 označimo presečnu tačku pravih QR i BC. Tada su tačke P_1, Q, R kolinearne pa u odnosu na njih možemo primeniti dokazani deo teoreme ($\Rightarrow$), pa je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

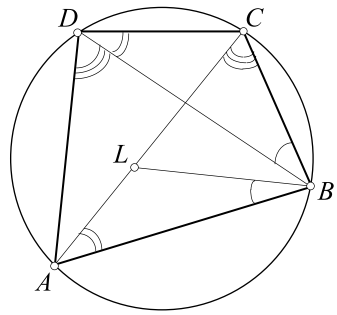
Na osnovu prethodne i polazne relacije je $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \frac{\overrightarrow{BP_1}}{\overrightarrow{P_1C}}$, tj. P=P_1. Dakle, tačke P, Q, R su kolinearne. ❑

---

[44] *Menelaj Aleksandrijski* (*I* vek), u svom delu "*Sferika*", dokazao je ovo tvrđenje za slučaj sfernih trouglova, a tvrđenje za slučaj trouglova u ravni navodi kao već poznato. Međutim, kako nijedan raniji izvor nije sačuvan, i u tom slučaju tvrđenje nazivamo *Menelajeva teorema*. Zbog svoje sličnosti Čevaova i Menelajeva teorema nazivaju se *teoreme blizanci*. 1500 godina, koje razdvajaju njihova otkrića, pokazuju da se geometrija u tom periodu veoma sporo razvijala.

Teorema 3. (*Ptolomej*[45]) Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Tada je proizvod njegovih dijagonala jednak zbiru proizvoda njegovih naspramnih ivica, tj: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

Dokaz: Neka je L tačka dijagonale AC takva da je $\angle ABL \cong \angle CBD$. Tada je $\Delta ABL \sim \Delta DBC$ ($\angle BAL \cong \angle BDC$), pa je $AB:DB = AL:DC$ tj. $AB \cdot CD = AL \cdot BD$ (1). Takođe je $\Delta BCL \sim \Delta BDA$ ($\angle BCL \cong \angle BDA$, $\angle LBC \cong \angle ABD$), na osnovu čega je $BC:BD = CL:DA$ tj. $BC \cdot AD = CL \cdot BD$ (2). Sabirajući (1) i (2) dobijamo traženu jednakost. ❑



Dokažimo sada znamenitu *Pitagorinu teoremu*:

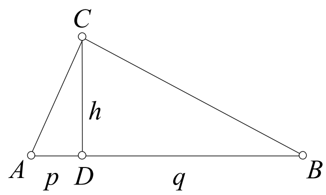
Teorema 4. Za svaki pravougli trougao važi:

(*i*) Kateta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu.

(*ii*) Visina koja odgovara hipotenuzi je geometrijska sredina ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu.

(*iii*) (*Pitagora*[46]) Kvadrat hipotenuze jednak je zbiru kvadrata kateta.

Dokaz: (*i*) U pravouglom trouglu ABC, sa pravim uglom kod temena C, označimo podnožje visine iz temena C sa D a projekcije kateta AC i BC sa p i q respektivno. Trouglovi ADC i ACB su slični jer su pravougli sa zajedničkim uglom kod temena A. Tada je: $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$, tj. $AC^2 = AB \cdot AD$.



---

[45] *Ptolomej Aleksandrijski* (*II* vek) dokazao je ovu teoremu u svom delu "*Veliki zbornik*".

[46] Pretpostavlja se da je ovo tvrđenje, bilo poznato još *Egipćanima* (oko 3000 g. pre n. e.) i *Vaviloncima* (oko 2000 g. pre n. e.), ali ga je *Pitagora*, starogrčki filozof i matematičar sa ostrva Samosa (*VI* v. pre n. e.), prvi dokazao. Pomoću njega, Pitagora (ili neki od njegovih učenika) je ustanovio nesamerljivost ivice i dijagonale kvadrata. Međutim, kod *Starih grka* Pitagorina teorema izražavala je odnos između površina odgovarajuća tri kvadrata, a ne između dužina tri ivice.

(*ii*) Iz sličnosti trouglova CAD i BCD sledi: $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{AD}{CD}$. Dakle $h^2=p\cdot q$, gde je
$h=CD$.

(*iii*) Kako je $AC^2=p\cdot AB$ i $BC^2=q\cdot AB$, važi:

$$AC^2+BC^2=p\cdot c+q\cdot c=(p+q)\cdot AB=AB^2. \ \square$$

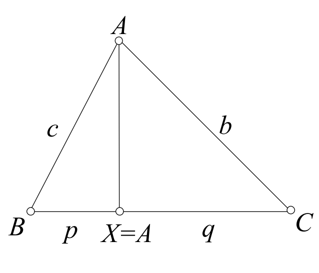
Lako se dokazuje i *obratna Pitagorina teorema*:

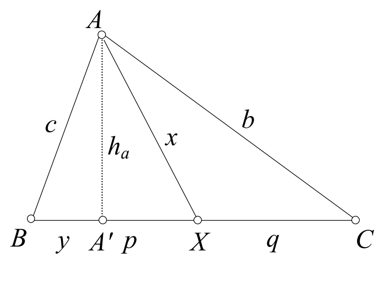
Teorema 5. Ako je $AC^2+BC^2=AB^2$, tada je trougao ABC pravougli, sa pravim uglom kod temena C.

Dokaz: Neka je $A'B'C'$ pravougli trougao, sa pravim uglom kod temena C', takav da je $A'C'\cong AC$ i $B'C'\cong BC$. Na osnovu Pitagorine teoreme je $A'C'^2+B'C'^2=A'B'^2$, pa je $A'B'\cong AB$. Dakle, trouglovi ABC i $A'B'C'$ su podudarni, prema stavu SSS, pa je ugao kod temena C, trougla ABC, prav. $\square$

Teorema 6. (*Stjuart*[47]) Ako je X proizvoljna tačka ivice BC trougla ABC, tada je: $AX^2 = \dfrac{CX}{BC}AB^2 + \dfrac{BX}{BC}AC^2 - BX\cdot CX.$

Dokaz: Sa a, b, c označimo odgovarajuće ivice, sa p, q, x redom duži BX, CX, AX i sa A' podnožje visine h_a iz temena A. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}(B,A',C)$.





[47] *M. Stjuart* (1717-1785), engleski matematičar, je dokazao i objavio ovu teoremu 1746. g. Tvrđenje je Stjuartu saopštio njegov učitelj, engleski matematičar *R. Simson* (1687-1768), koji ga je objavio tek 1749. g. Moguće je međutim, da je ono bilo poznato još *Arhimedu iz Sirakuze* (*III* v. pre n. e.).

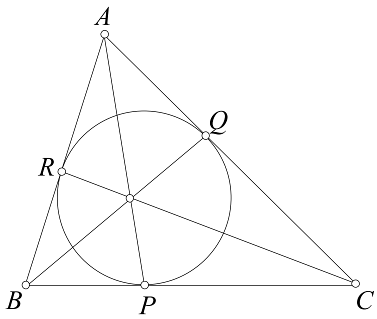
Dokažimo najpre tvrđenje u slučaju kad je $X=A'$. Primenom Pitagorine teoreme biće: $h_a^2 = b^2 - q^2$ i $h_a^2 = c^2 - p^2$. Množenjem prve jednakosti sa p a druge sa q i zatim sabiranjem zaista dobijamo $h_a^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq$.

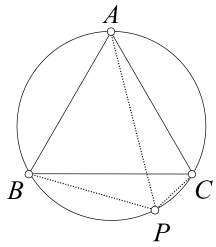
Neka je $X \neq A'$. Duž h_a je visina u trouglovima ABX i ABC. Pretpostavimo, ne umanjujući opštost, da je $\mathcal{B}(B,A',X)$. Ako sa y označimo BA', primenjujući prethodno dokazano dobijamo: $h_a^2 = \frac{y}{p}x^2 + \frac{p-y}{p}c^2 - y(p-y)$ i $h_a^2 = \frac{y}{a}b^2 + \frac{a-y}{a}c^2 - y(a-y)$. Izjednačavanjem desnih strana jednakosti i sređivanjem dobijamo $x^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq$, što je trebalo dokazati. Dokaz je sličan i u slučaju kada nije $\mathcal{B}(B,A',C)$ s tim što je tada $h_a^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 + pq$. ❑

Primer 1. Dokazati da se prave određene temenima i dodirnim tačkama naspramnih ivica sa upisanim krugom trougla ABC seku u jednoj tački (tzv. *Žergonovoj*[48] *tački*).

Rešenje: Neka su P, Q, R, dodirne tačke kruga upisanog u trougao ABC sa njegovim ivicama BC, CA, AB, redom. Tada su podudarne odgovarajuće tangentne duži: $BP \cong BR$, $CP \cong CQ$, $AQ \cong AR$. Tada je $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$. Kako je $\mathcal{B}(B,P,C)$, $\mathcal{B}(C,Q,A)$, $\mathcal{B}(A,R,B)$, mora biti $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$, pa je na osnovu prethodnog $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Dakle, prave AP, BQ, CR pripadaju jednom pramenu prema Čevaovoj teoremi. To je pramen konkurentnih pravih, jer se AP i BQ seku na osnovu Pašove aksiome (*zad 2.8*)

[48] Ovo tvrđenje dokazao je *J. D. Žergon* (1771-1859), francuski matematičar. U *XIX* veku posvećena je posebna pažnja metričkim svojstvima trougla, pa su otkrivene i druge tačke karakteristične za trougao (*v. zad. 8.46, 8.47*).





Primer 2. Neka je P proizvoljna tačka kruga, opisanog oko pravilnog trougla ABC. Dokazati da najveća od duži PA, PB, PC jednaka sumi ostale dve.

Rešenje: Neka je $P,A \div BC$. Tada je četvorougao $ABPC$ tetivan, pa na osnovu Ptolomejeve teoreme važi: $PA \cdot BC = AB \cdot PC + AC \cdot PB$. Ali kako je $AB \cong BC \cong CA$, sledi: $PA = PC + PB$. Dokaz je isti i u slučajevima kada je tačka P Na nekom drugom luku kruga opisanog oko trougla ABC.

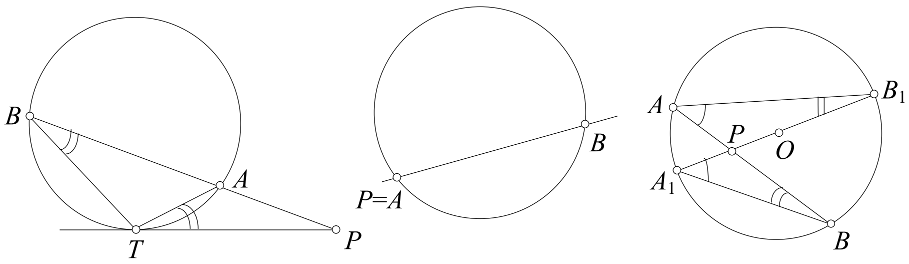
Zadaci

1. Primenom Čevaove teoreme dokazati da se prave određene visinama trougla seku u jednoj tački.
2. Dokazati da kod proizvoljnog trougla simetrale spoljašnjih uglova seku prave određene naspramnim ivicama u kolinearnim tačkama.
3. Ako je a ivica i d dijagonala pravilnog petougla, dokazati da je: $d^2 - ad - a^2 = 0$.
4. Ako su a, b, c date duži, konstruisati duž x ako je: (i) $x^2 = a^2 + b^2$; (ii) $x^2 = a^2 - b^2$; (iii) $x^2 = ab$; (iv) $x^2 = 3ab - c^2$.
5. Ako su a, b, c ivice i t_a odgovarajuća težišna duž trougla, dokazati:
$$t_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

8.7 Potencija tačke u odnosu na krug

Među najinteresantnijim svojstvima kruga, koja naglašavaju neke njegove metričke osobine je i potencija tačke[49]. Pre prelaska na samu definiciju pojma potencije, dokažimo sledeću teoremu:

Teorema 1. Ako je P tačka u ravni kruga $k(O,r)$, tada je za svaku pravu te ravni koja sadrži tačku P i seče krug u tačkama A i B izraz $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ konstantan i $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PO^2-r^2$. Ako je P spoljašnja tačka kruga k i PT njegova tangenta u tački T, tada je $PA\cdot PB=PT^2$.



Dokaz: Razmotrimo tri slučaja:

1) Tačka P je spoljašnja tačka kruga. Tada nije $\mathcal{B}(A,P,B)$ pa je $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}>0$ (1). Neka je npr. $\mathcal{B}(P,A,B)$. Trouglovi PAT i PTB su slični (jedan zajednički ugao i $\angle PTA\cong\angle PBT$), pa je $PA{:}PT=PT{:}PB$ tj. $PA\cdot PB=PT^2=PO^2-r^2$. Tada je zbog relacije (1) i $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PT^2=PO^2-r^2$.

2) Ako je P na krugu k, tada je $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0=PO^2-r^2$.

3) Tačka P je unutrašnja tačka kruga. Tada je $\mathcal{B}(A,P,B)$ pa je $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}<0$ (2). Neka su A_1 i B_1 presečne tačke prave OP sa krugom k (i neka je $\mathcal{B}(A_1,P,O)$). Zbog podudarnosti odgovarajućih periferijskih uglova trouglovi APB_1 i A_1PB su slični, pa je $AP{:}A_1P=PB_1{:}PB$, odnosno:

$PA\cdot PB=PA_1\cdot PB_1=(r-PO)\cdot(r+PO)=r^2-PO^2$. Na osnovu relacije (2) je:
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PO^2-r^2$. ❑

Sada možemo dati definiciju potencije tačke u odnosu na krug.

[49] Reč *potencija* prvi je u tom značenju upotrebio švajcarski geometričar *J. Štajner* (1769-1863).

Definicija. Konstantan proizvod $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ uveden prethodnom teoremom nazivamo *potencija* tačke P u odnosu na krug, k u oznaci $p(P,k)$.

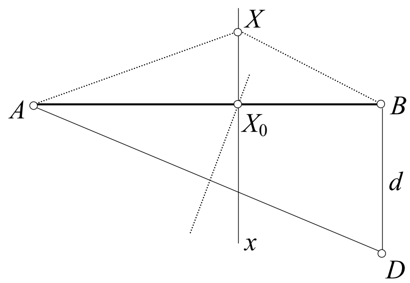
Na osnovu prethodne teoreme potencija tačke P u odnosu na krug $k(O,r)$ je broj PO^2-r^2. Taj broj je pozitivan, nula ili negativan, već prema tome da li je P spoljašnja tačka kruga k, tačka kruga k ili unutrašnja tačka tog kruga.

$$p(P,k)\begin{cases} < 0 \text{ ako je } OP < r \\ = 0 \text{ ako je } OP = r \\ > 0 \text{ ako je } OP > r \end{cases}$$

U narednom izlaganju cilj nam je da utvrdimo šta predstavljaju sve tačke neke ravni za koje su potencije u odnosu na dva data kruga jednake. Najpre dokažimo sledeće pomoćno tvrđenje:

Lema. Ako su A i B tačke i d duž neke ravni, skup tačaka X te ravni takvi da je AX^2-BX^2=d^2 je prava upravna na pravoj AB.

Dokaz: Neka je D tačka te ravni takva da je $DB \perp BA$ i $DB \cong d$. Sa X_0 označimo presečnu tačku prave AB i medijatrise duži AD. Tada je za tačku X_0:



AX_0^2-BX_0^2=DX_0^2-BX_0^2=DB^2=d^2.

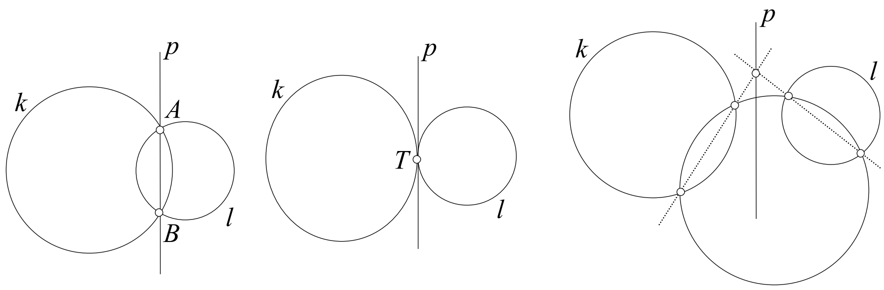
Traženi skup tačaka je upravna prava na pravoj AB u tački X_0, što sledi iz direktne i obratne Pitagorine teoreme. ❑

Teorema 2. Skup svih tačaka ravni kojima su potencije u odnosu na dva data nekoncentrična kruga među sobom jednake, predstavlja pravu normalnu na pravoj određenoj centrima tih krugova.

Dokaz: Neka su $k_1(O_1,r_1)$ i $k_2(O_2,r_2)$ ($r_1>r_2$) ta dva kruga. Tačka P pripada traženom skupu akko je $p(P,k_1)$=$p(P,k_2)$ tj. akko je O_1P^2-r_1^2=O_2P^2-r_2^2, odnosno akko je O_1P^2-O_2P^2=r_1^2-r_2^2. Na osnovu prethodne leme traženi skup je zaista prava upravna na pravoj O_1O_2. ❑

Na osnovu prethodne teoreme uvodimo sledeći pojam:

Definicija. Skup svih tačaka ravni kojima su potencije u odnosu na dva data nekoncentrična kruga među sobom jednake, naziva se *potencijalna osa* ili *radikalna osa* tih krugova.

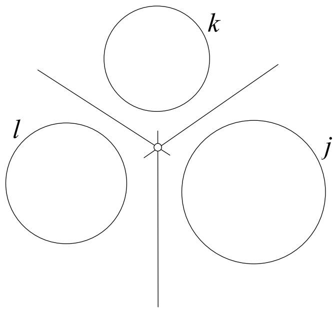


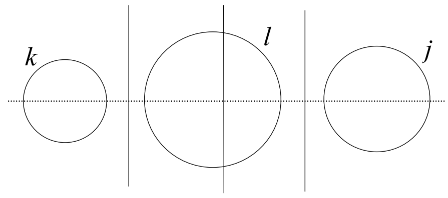
U specijalnom slučaju, kada se ta dva kruga seku u tačkama A i B, svaka od tih tačaka ima potenciju nula u odnosu na oba kruga, pa je zbog toga njihova potencijalna osa prava AB. Analogno, kada se dva kruga dodiruju, njihova potencijalna osa je zajednička tangenta u tački dodira. Ostaje nam da konstruišemo potencijalnu osu kad krugovi nemaju zajedničkih tačaka. To je moguće uraditi koristeći dokazanu lemu. Nešto kraći postupak je vezan za konstrukciju pomoćnog kruga koji seče oba zadata u tačkama npr. A,B odnosno C,D. Presečna tačka pravih AB i CD tada pripada traženoj potencijalnoj osi.

Na kraju ovog odeljka, pomenimo još neke pojmove vezane za potenciju tačke u odnosu na krug.

Definicija. Skup svih krugova ravni od kojih svaka dva imaju za potencijalnu osu istu pravu s, naziva se *pramen krugova* a prava s *potencijalna osa tog pramena krugova*.

Pretpostavimo da tri kruga ne pripadaju istom pramenu i da nikoja dva nisu koncentrična. Tada, posmatrajući ih par po par, možemo odrediti tri potencijalne ose. Bilo koja tačka koja ima istu potenciju u odnosu na sva tri kruga mora pripadati svakoj od tih pravih.

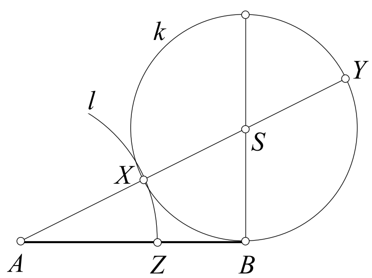




Obratno, bilo koja tačka preseka dve od te tri potencijalne ose, ima istu potenciju u odnosu na sva tri kruga, pa mora pripadati i trećoj osi. Tačka u kojoj se te tri ose seku naziva se *potencijalno središte* ta tri kruga. Ako su dve od tih triju osa paralelne, onda je i treća paralelna njima. Time smo dokazali sledeće tvrđenje:

Teorema 3. Potencijalne ose triju krugova neke ravni pripadaju jednom pramenu.

Primer. Za datu duž AB konstruisati tačku Z koja je deli po zlatnom preseku. (Tačka Z duži AB deli tu duž po *zlatnom preseku*[50] ako je $AZ:ZB=AB:AZ$.)



Rešenje: Neka je $k(S,SB)$ krug poluprečnika $SB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$, koji dodiruje pravu AB u tački B. Taj krug možemo konstruisati, a zatim i njegove presečne tačke sa pravom AS. Označimo ih sa X i Y tako da je $\mathcal{B}(A,X,S)$. Tada je traženu tačku Z možemo konstruisati kao presek duži AB i kruga $l(A,AX)$. Zaista:

$a^2=AB^2=AX\cdot AY=AX(AX+a)=AZ(AZ+a)$, tj. $\dfrac{AB}{AZ}=\dfrac{AZ}{AB}+1$. Odatle sledi $\dfrac{AB-AZ}{AZ}=\dfrac{AZ}{AB}$, odnosno $\dfrac{AZ}{BZ}=\dfrac{AB}{AZ}$.

[50] Ovakvu podelu razmatrao je *Pitagora sa ostrva Samosa*, starogrčki filozof i matematičar (*VI* v. pre n. e.), i nazvao *zlatnim deljenjem*. Termin koji danas koristimo uveo je *Leonardo da Vinči* (1452-1519), italijanski slikar, arhitekta i pronalazač.

Zadaci

1. Koju najmanju vrednost može imati potencija tačke u odnosu na krug poluprečnika R? Koja tačka ima tu ekstremnu vrednost?
2. Odrediti skup tačaka koji ima konstantnu potenciju u odnosu na dati krug.
3. Ako su PT i PU tangente iz tačke P na dve koncentrična kruga, pri čemu tačka T pripada manjem od tih krugova a U pripada većem, i ako prava PT seče veći krug u tački Q, onda je PT^2-PU^2=QT^2.
4. Neka su A, B zajedničke tačke, a PQ zajednička tangenta dva kruga u dodirnim tačkama P i Q. Dokazati da središte duži PQ pripada pravoj AB.
5. Ako su $k(S,r)$, $l(O,R)$ opisani i upisani krug nekog trougla dokazati da je $OS^2=R^2-2Rr$. (*Ojlerova formula*[51])
6. Neka su k, l, j krugovi čiji centri su nekolinearne tačke i takvi da su: A,B zajedničke tačke krugova k i l, C,D zajedničke tačke krugova l i j, E,F zajedničke tačke krugova j i k. Dokazati da se prave AB, CD, EF seku u jednoj tački.

Razni zadaci (sličnost)

1. Ako su M i N tačke u kojima prava kroz presek O dijagonala AC i BD paralelna sa osnovicama AB i CD trapeza $ABCD$, seče njegove krake, dokazati da je tačka O središte duži MN.
2. Neka je $ABCD$ trapez osnovice AB. Ako je O presečna tačka dijagonala trapeza, E presečna tačka pravih BC i AD, dokazati da prava EO sadrži središta osnova AB i CD.
3. Ako su P, Q, R tačke u kojima proizvoljna prava kroz tačku A seče prave određene ivicama BC, CD i dijagonalom BD, paralelograma $ABCD$, dokazati da je $AR^2=PR\cdot QR$.

---

[51] *L. Ojler* (1707-1783), švajcarski matematičar.

4. Tačke D i K pripadaju ivicama BC i AC trougla ABC pri čemu je $BD:DC=2:5$ i $AK:KC=3:2$. U kom odnosu prava BK deli odsečak AD?

5. Ako je P tačka ivice AD paralelograma $ABCD$, takva da je $AP=\frac{1}{n}AD$, i Q tačka preseka pravih AC i BP, dokazati da je $AQ=\frac{1}{n+1}AC$.

6. Neka je p prava i B, C tačke kruga k neke ravni. Konstruisati tačku A na krugu k takvu da je težište trougla ABC na pravoj p.

7. Neka je ABC trougao neke ravni. Konstruisati kvadrat čija dva susedna temena pripadaju ivici BC a preostala dva temena ivicama AB i AC.

8. Neka je k krug sa prečnikom AB. Konstruisati kvadrat čija dva susedna temena pripadaju prečniku AB a preostala dva temena krugu k.

9. Neka su p i q prave A tačka i m i n dve duži neke ravni. Konstruisati pravougaonik $ABCD$, čija temena B i D pripadaju redom pravama p i q, i tako da je $AB:AD=m:n$.

10. Ako su Pp i Qq polupravе neke ravni, konstruisati na njima tačke A i B takve da je $PA:AB:BQ=1:2:1$.

11. U dati trougao ABC upisati trougao čije su ivice paralelne datim pravama p, q, r.

12. Ako su p, q, r tri prave neke ravni, konstruisati pravu t, koja je upravna na pravoj p, i seče date prave redom u tačkama P, Q, R takvim da je $PQ\cong QR$.

13. U krug sa centrom O upisan je četvorougao $ABCD$ čije su dijagonale uzajamno normalne i seku se u tački E. Prava koja je u tački E upravna na pravoj AD seče ivicu BC u tački M.
   (i) dokazati da je M središte duži BC;
   (ii) odrediti skup tačaka M, kada se dijagonala BD menja ostajući upravna na AC.

14. Ako je $\mathcal{H}_{S,k}$ homotetija, $\mathcal{I}$ izometrija neke ravni i $\mathcal{I}(S)=S'$, dokazati da je tada: $\mathcal{I}\circ\mathcal{H}_{S,k}\circ\mathcal{I}^{-1}=\mathcal{H}_{S',k}$.

15. Dokazati da transformacija sličnosti koja nije izometrija ne može imati više od jedne fiksne tačke.

16. Neka je t tangenta kruga l opisanog oko trougla ABC, u temenu A. Ako je D tačka prave AC takva da je $BD \| t$, dokazati da je $AB^2 = AC \cdot AD$.

17. Ako ortocentar oštrouglog trougla deli dve visine u jednakom odnosu, računajući od temena trougla, dokazati da je taj trougao jednakokraki.

18. U trouglu ABC visina BD dodiruje krug opisan oko tog trougla. Dokazati da je :
    (i) razlika uglova na osnovici AC jednaka 90°.
    (ii) $BD^2 = AD \cdot CD$.

19. Krug sa centrom na osnovi BC jednakokrakog trougla ABC dodiruje krake AB i AC. Ako su P i Q presečne tačke tih kraka sa nekom tangentom tog kruga, dokazati da je $4 \cdot PB \cdot CQ = BC^2$.

20. Neka je H ortocentar oštrouglog trougla ABC. Ako je H središte visine AD, a visinu BE deli u odnosu 3:2, u kom odnosu H deli visinu CF.

21. Neka je k krug i S tačka van tog kruga neke ravni. Ako su P i Q dodirne tačke tangenti iz S na krugu k, a X i Y presečne tačke neke prave s kroz S sa krugom k, dokazati da je $XP:YP = XQ:YQ$.

22. Neka je D tačka ivice BC trougla ABC. Ako su O_1 i O_2 centri krugova opisanih oko trouglova ABD i ACD, dokazati $\Delta ABC \sim \Delta AO_1O_2$.

23. Neka je ABC trougao kome je ugao kod temena A prav. Ako upravna kroz proizvoljnu unutrašnju tačku P hipotenuze BC seče prave AC i AB u tačkama Q i R, a opisani krug tog trougla u tački S, dokazati da je $PS^2 = PQ \cdot PR$.

24. Neka je A proizvoljna tačka kraka OP pravog ugla POQ. Ako su B,C,D tačke kraka OQ takve da je $\mathcal{B}(O,B,C)$, $\mathcal{B}(B,C,D)$ i $OA \cong OB \cong BC \cong CD$, dokazati da je $\Delta ABC \sim \Delta DBA$.

25. Ako su a, b, c ivice, R poluprečnik opisanog kruga trougla i h_a odgovarajuća visina, dokazati da je $bc = 2Rh_a$.

26. Konstruisati trougao:
    (i) α, β, $R+r$; (ii) α, $b:c$, $t_c - h_c$; (iii) h_a, h_b, h_c.

27. Ako su AB i CD osnovice jednakokrakog trapeza $ABCD$ opisanog oko kruga poluprečnika r, dokazati da je $AB{\cdot}CD=4r^2$.

28. Neka je AE ($E\in BC$) bisektrisa unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC. Ako je $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, dokazati da je:

   (i) $BE=\dfrac{ac}{b+c}$; (ii) $CE=\dfrac{ab}{b+c}$.

29. Neka su AE ($E\in BC$) i BF ($F\in AC$) dve bisektrise unutrašnjih uglova i S centar upisanog kruga trougla trougla ABC. Ako je $AS:SE=BS:SF$, dokazati da je taj trougao jednakokraki.

30. Konstruisati paralelogram kod koga su ivice podudarne dvema datim dužima, a dijagonale su u odnosu 2:3.

31. Neka su M i N presečne tačke ivica AB i AC trougla ABC, sa pravom koja je kroz centar upisanog kruga tog trougla paralelna sa njegovom ivicom BC. Izračunati dužinu MN u funkciji dužina ivica trougla ABC.

32. Neka je AA_1 težišna duž trougla ABC. Ako su P i Q presečne tačke bisektrisa uglova AA_1B i AA_1C sa ivicama AB i AC, dokazati da je $PQ\|BC$.

33. Ako je kod trougla ABC, zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao i ako je r poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla, dokazati da je $AB^2+AC^2=4r^2$.

34. Ako su a, b, c tri date duži, konstruisati duž $x=\dfrac{a\sqrt{ab+c^2}}{b+c}$.

35. Ako je D podnožje visine iz temena A trougla ABC, dokazati da je zbir ili razlika unutrašnjih uglova B i C prav ugao ako i samo ako je $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AD^2}$.

36. Ako je su a, b, c ivice, s poluobim i l_a odsečak bisektrise unutrašnjeg ugla naspram ivice a trougla ABC, dokazati da je: $l_a=\dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{s(s-a)}$.

37. Ako je T težište i X proizvoljna tačka u ravni trougla ABC, dokazati da je:

$XA^2 + XB^2 + XC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3XT^2$. (*Lajbnicova*[52] *teorema*)

Odrediti zatim, tačku u ravni trougla ABC, za koju je zbir kvadrata rastojanja od temena tog trougla minimalan.

38. Izračunati rastojanje između težišta i centra opisanog kruga trougla, u funkciji njegovih ivica i poluprečnika opisanog kruga.

39. Dokazati da kod trougla ABC simetrala spoljašnjeg ugla A i simetrale unutrašnjih uglova B i C seku prave određene naspramnim ivicama u kolinearnim tačkama.

40. Dokazati da kod raznostranog trougla ABC tangente opisanog kruga u temenima A,B,C seku prave određene naspramnim ivicama u kolinearnim tačkama.

41. Dokazati da su kod trougla ABC središte visine AD, centar upisanog kruga i dodirna tačka ivice BC sa spolja upisanim krugom tri kolinearne tačke.

42. Primenom Menelajeve, dokazati Simpsonovu teoremu (v. zad. 5.19).

43. Kroz tačku M ivice AB trougla ABC konstruisana je prava koja seče pravu AC u tački K. Odrediti u kom odnosu prava MK deli ivicu BC, ako $AM{:}MB=1{:}2$ i $AK{:}AC=3{:}2$.

44. Neka je A_1 središte ivice BC trougla ABC. Ako su P i Q tačke ivica AB i AC takve da je $BP{:}PA=2{:}5$ i $AQ{:}AC=6{:}1$, odrediti u kom odnosu prava PQ deli težišnu duž AA_1.

45. Dokazati da se kod proizvoljnog trougla prave određene temenima i dodirnim tačkama spolja upisanog kruga sa pravama koje sadrže naspramne ivice seku u jednoj tački.

46. Dokazati da se prave, koje sadrže temena i dele suprotne ivice na delove proporcionalne kvadratima susednih ivica, seku u jednoj tački (tzv. *Lemoanovoj*[53] *tački* tog trougla).

47. Dokazati da se kod proizvoljnog trougla prave određene temenima i dodirnim tačkama spolja upisanih krugova sa naspramnim ivicama seku u jednoj tački (tzv. *Nagelovoj*[54] *tački* tog trougla).

---

[52] *G. V. Lajbnic* (1646-1716), nemački matematičar.

[53] *E. Lemoan* (1751-1816), francuski matematičar.

48. Ako je a ivica, a D i d duža i kraća dijagonala pravilnog sedmougla, dokazati da je: $\frac{1}{a}=\frac{1}{D}+\frac{1}{d}$.

49. Šta predstavlja skup tačaka iz koje su tangentne duži u odnosu na dva data kruga podudarne.

50. Dokazati da središta duži na zajedničkim tangentama dva kruga koja se ne seku, određene dodirnim tačkama, predstavljaju kolinearne tačke.

51. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje datu pravu.

52. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje dati krug.

53. Neka je E presek bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC sa njegovom ivicom BC i A_1 središte te ivice. Ako su P i Q preseci kruga opisanog oko trougla AEA_1 sa ivicama AB i AC trougla ABC, dokazati da je $BP \cong CQ$.

54. Dokazati da poluprečnik kruga opisanog oko nekog trougla nije manji od dvostrukog poluprečnika kruga upisanog u taj trougao.

55. Neka su PP_1 i QQ_1 spoljašnje tangente krugova $k(O,r)$ i $k_1(O_1,r_1)$, u dodirnim tačkama P, P_1, Q, Q_1 respektivno. Ako je S presečna tačka tih tangenti, A jedna od presečnih tačaka tih krugova i L i L_1 preseci prave SO sa pravama PQ i P_1Q_1, dokazati da je $\angle LAO \cong \angle L_1AO_1$.

56. Ako su $k_a(S_a,r_a)$, $l(O,R)$ spolja upisani krug i opisani krug nekog trougla, dokazati da je $S_aO^2=R^2+2r_aR$.

57. Konstruisati krug normalan na tri data kruga.

58. Ako je d dijagonala, a a ivica pravilnog petougla dokazati da je:

$$d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}a.$$

59. Konstruisati pravilan petougao:
(*i*) ivice podudarne datoj duži;
(*ii*) upisan u dati krug.

---

[54] *K. H. Nagel* (1803-1882), nemački matematičar, objavio je ovo tvrđenje 1836. g. Inače, svaka od pravih o kojima je reč dele obim trougla na dva jednaka dela, pa se ovo tvrđenje naziva i *teorema o poluobimu trougla*.

60. Dokazati da je ivica pravilnog desetougla, upisanog u krug, jednaka većem delu poluprečnika tog kruga, podeljenog po zlatnom preseku.

61. Dokazati da je kvadrat ivice pravilnog petougla, upisanog u krug, jednak zbiru kvadrata ivica pravilnog šestougla i pravilnog desetougla upisanog u taj krug.

62. Konstruisati tetivni četvorougao čije su ivice podudarne četirima datim dužima a, b, c, d.

63. Neka su k i l dva kruga i P tačka neke ravni. Konstruisati pravu koja sadrži tačku P i na krugovima k i l određuje podudarne tetive.

64. Neka su ABC i $A_1B_1C_1$ dva trougla neke ravni, takva da se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u tački S. Ako se prave BC i B_1C_1, AC i A_1C_1, AB i A_1B_1 seku redom u tačkama P, Q, R, dokazati da su one kolinearne (*Dezargova*[55] *teorema*).

65. Ako su A', B', C' podnožja visina iz temena A, B, C trougla ABC i P, Q, R presečne tačke redom pravih BC i $B'C'$, AC i $A'C'$, AB i $A'B'$, dokazati da su P, Q, R kolinearne tačke.

66. Neka su p, q, r tri prave neke ravni koje se seku u tački S, i A, B, C tačke van tih pravih. Konstruisati trougao PQR čija temena pripadaju pravama p, q, r a ivice sadrže tačke A, B, C. Može li se ova konstrukcija izvršiti samo pomoću lenjira?[56]

67. Ako Neka su A, B, C, D, E, F proizvoljne tačke nekog kruga k. Tada su tačke $X=AE\cap BD$, $Y=AF\cap CD$, $Z=BF\cap CE$ kolinearne.
(*Paskalova teorema*[57])

---

[55] *Ž. Dezarg* (1591-1661), francuski arhitekta. Dezargova teorema može se dokazati i bez primene aksioma podudarnosti, dakle u afinoj geometriji. Tvrđenje važi i u tzv. *projektivnoj geometriji* za koju je Dezarg jedan od utemeljivača.

[56] Konstrukcije samo pomoću lenjira izučavali su, najpre francuski matematičar *J. H. Lambert* (1728-1777), a zatim francuski geometričari *Š. Ž. Brijanšon* (1783-1864) i *V. Ponsele* (1788-1867). Ove konstrukcije karakteristične su za projektivnu geometriju, u kojoj se ne definiše pojam podudarnosti.

[57] Teorema, koju je *B. Paskal* (1623-1662), francuski filozof i matematičar, dokazao još kao šesnaestogodišnjak, takođe je jedna od fundamentalnih teorema projektivne geometrije. Inače, ovo tvrđenje važi uopšte za *krive drugog reda - elipsu, parabolu i hiperbolu*.

Glava IX

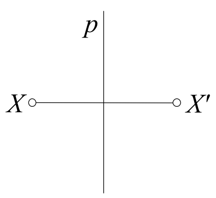
Inverzija

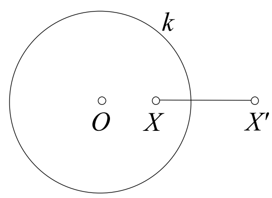
9.1 Definicija i osnovna svojstva inverzije

U ovoj glavi definisaćemo jedno preslikavanje koje će, na neki način, predstavljati "refleksiju" u odnosu na krug. Prirodno je da takvo preslikavanje ima neka ista svojstva kao i osna refleksija. Naravno, ono neće biti izometrija, ali istaći ćemo sledeća željena zajednička svojstva:

1. *Osna refleksija je bijektivno preslikavanje.*
2. *Osna refleksija je involucija.*
3. *Osna refleksija preslikava jednu od oblasti na koju osa te refleksije deli ravan u drugu.*
4. *Sve invarijantne tačke osne refleksije su na osi te refleksije.*
5. *Ako je X' slika tačke X u osnoj refleksiji tada je prava XX' normalna na osu te refleksije.*

Dakle, preslikavanje koje sada uvodimo trebalo bi da zadovoljava sva ova svojstva gde bi samo reč osa bila zamenjena sa reči krug.

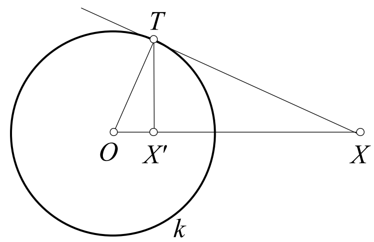




Uvedimo najpre oznaku: $E^2_* = E^2 \setminus \{O\}$, gde je O tačka ravni E^2.

Definicija. Neka je $k(O,r)$ krug ravni E^2. Preslikavanje ψ_k: $E^2_* \to E^2_*$ definisano sa: $\psi_k(X)=X' \Leftrightarrow X'$ pripada polupravoj OX i $OX \cdot OX'=r^2$, naziva se *inverzija*[58] u odnosu na krug *k*. Krug *k*, tačka *O* i poluprečnik *r* su redom: *krug*, *centar* i *poluprečnik inverzije*.

Razlog što smo za domen i kodomen izabrali E^2_* upravo je vezan za svojstvo 1. Najpre, centar *O* nema svoju sliku jer bi bilo $OO \cdot OO'=r^2$, što nije moguće. S druge strane *O* nije slika nijedne tačke pa, kako želimo da je preslikavanje bijektivno, biramo i za kodomen E^2_*.



Konstruišimo sliku proizvoljne tačke *X* u inverziji ψ_k u odnosu na krug $k(O,r)$. Pretpostavimo da je *X* spoljašnja tačka kruga *k*. Neka je *T* dodirna tačka tangente iz tačke *X* na krug *k*, i *X'* podnožje upravne iz te tačke na pravoj *OX*. Dokažimo da je tačka *X'* slika tačke *X* u inverziji ψ_k. Pravougli trouglovi *OTX* i *OX'T* su slični ($\angle TOX \cong \angle X'OT$), na osnovu čega je $OT:OX'=OX:OT$. Dakle, $OX \cdot OX'=OT^2=r^2$, pa je zaista $\psi_k(X)=X'$. Slučajeve kada je tačka *X* na krugu *k* ili u njegovoj unutrašnjosti razmotrićemo kasnije.

Sada ćemo iskazati neka svojstva inverzije; najpre ona analogna pomenutim 1-5, a zatim još neka.

Teorema 1.* Inverzija je bijektivno preslikavanje.

Teorema 2.* Inverzija je je involucija.

Na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da se konstrukcija slike unutrašnje tačke kruga *k*, u inverziji ψ_k, može izvršiti obrnutim postupkom u odnosu na onaj kada je u pitanju bila spoljašnja tačka.

Teorema 3. Inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$ preslikava unutrašnju oblast tog kruga bez centra *O* u njegovu spoljašnju oblast; i obratno, spoljašnja oblast se tom inverzijom preslikava u unutrašnju oblast bez centra *O*.

[58] Ovakvo preslikavanje prvi je uveo *L. Magnus* 1831. g.

Dokaz: Neka je X proizvoljna tačka u unutrašnjosti kruga inverzije, različita od O, i X' njena slika u toj inverziji. Tada je $OX\cdot OX'=r^2$, pa kako je $OX<r$ sledi $OX'>r$ tj. X' je spoljašnja tačka tog kruga. Slično se dokazuje i drugi deo tvrđenja. ❑

Na osnovu relacije $OX\cdot OX'=r^2$, intuitivno je jasno da ako se tačka X "približava" centru O, njena slika X' se "udaljava ka beskonačnosti". Takođe, ako je tačka X "blizu" kruga k i njena slika će biti "blizu" kruga k, samo sa njegove druge strane. Te zaključke možemo iskazati i u formalnijem obliku:

- *Ako* $\psi_k: A,B \mapsto A',B'$ *i* $\mathcal{B}(O,A,B)$ *tada je* $\mathcal{B}(O,B',A')$.

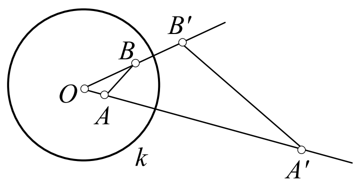
Teorema 4. Sve invarijantne tačke inverzije su na krugu te inverzije.

Dokaz: Tačka X je invarijantna ako i samo ako je $OX\cdot OX=r^2$ odnosno ako i samo ako tačka X pripada krugu inverzije. ❑

Teorema 5. Ako su X i X' parovi odgovarajućih tačaka neke inverzije tada je
prava XX' normalna na krug te inverzije.

Dokaz: Tvrđenje neposredno sledi, jer su po definiciji X, X' i centar kruga tri kolinearne tačke. ❑

Lema 1. Neka su O, A, B tri nekolinearne tačke i ψ_k inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$. Ako su A' i B' slike tačaka A i B u toj inverziji, tada je $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$.



Dokaz: Kako $\psi_k: A,B \mapsto A',B'$, to je $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=r^2$. Na osnovu toga je $OA:OB'=OB:OA'$, pa je zbog $\angle AOB \cong \angle B'OA'$ zaista $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$. ❑

Jasno je da inverzija nije izometrijska transformacija. Sada ćemo dokazati da inverzija ne čuva kolinearnost, tj. da se inverzijom prava ne slika u pravu. Pre toga uvedimo oznaku: ako je Φ neka figura ravni E^2 i O tačka te ravni, tada je $\Phi^O = \Phi \setminus \{O\}$.

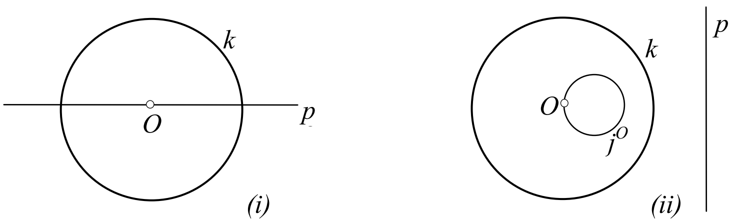
Teorema 6. Neka je ψ_k inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$ ravni E^2. Ako je p prava a l krug te ravni, tada:

(i) ako $O\in p$, tada je $\psi_k(p^O)=p^O$;

(ii) ako $O\notin p$, tada je $\psi_k(p)=j^O$; gde je j krug koji sadrži tačku O;

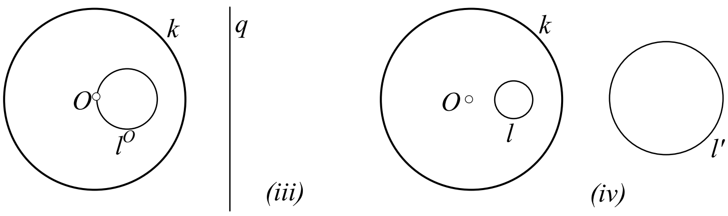
(iii) ako $O\in l$, tada je $\psi_k(l^O)=q$; gde je q prava koja ne sadrži tačku O;

(iv) ako $O\notin l$, tada je $\psi_k(l)=l'$ gde je l' krug koji ne sadrži tačku O.



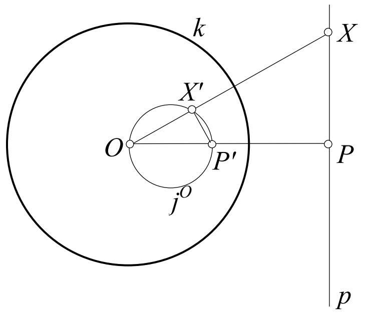
Dokaz: (i) Ako $X\in p^O$, tada $X'\in(OX$ pa je $X'\in p^O$.

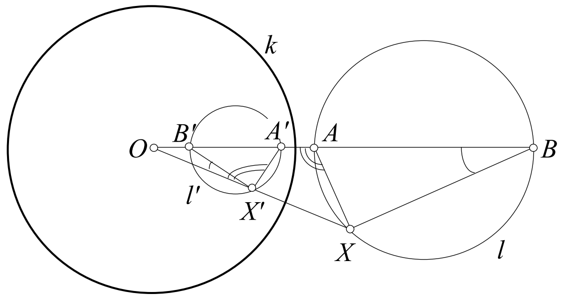
(ii) Neka je P podnožje upravne iz tačke O na pravoj p. Kako $O\notin p$, to je $P\neq O$, pa tačka P ima svoju sliku u inverziji ψ_k, označimo je sa P'. Neka je X proizvoljna tačka prave p različita od P i $X'=\psi_k(X)$. Na osnovu prethodne leme je $\Delta OPX\sim\Delta OX'P'$, pa je $\angle OX'P\cong\angle OPX=90^\circ$. Dakle, tačka X' pripada krugu nad prečnikom OP', označimo ga sa j. Kako je $X'\neq O$, sledi da $X'\in j^O$. Obrnutim postupkom dokazujemo da je svaka tačka skupa j^O slika neke tačke prave p, pa je zaista $\psi_k(p)=j^O$.



(iii) Direktna posledica (ii) jer je ψ_k involucija.

(iv)* ❑

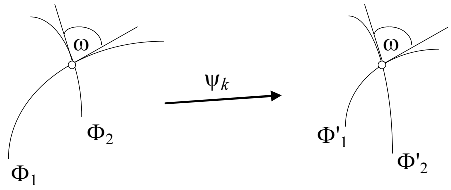




Konstrukciju slika prave i kruga u nekoj inverziji možemo izvršiti na osnovu prethodne teoreme, ako najpre konstruišemo slike dve odnosno tri odgovarajuće tačke. Naravno, postupak je moguće skratiti ako prava ili krug seku krug inverzije, jer su u tom slučaju presečne tačke fiksne. Važno je napomenuti da se centar kruga inverzijom ne slika u centar (u slučaju (*iv*) prethodne teoreme).

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza:

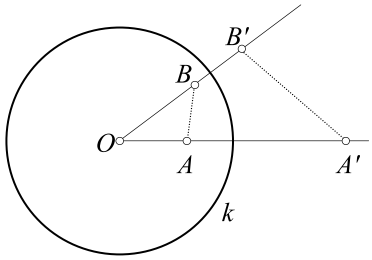
Teorema 7. Neka je ψ_k inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$ ravni E^2 i Φ_1, Φ_2 figure koje nisu disjunktne i od kojih je svaka prava ili krug te ravni. Ako je $\Phi'_1=(\Phi_1{}^O)$ i $\Phi'_2=(\Phi_2{}^O)$, tada je ugao koji određuju Φ'_1, Φ'_2 podudaran uglu koji određuju Φ_1, Φ_2.



Prethodna teorema može se iskazati u opštijem obliku pri čemu Φ_1, Φ_2 mogu predstavljati bilo koje dve *glatke krive* ravni E^2 (ugao između dve glatke krive definiše se kao ugao između tangenti tih krivih u njihovoj presečnoj tački). Za takva preslikavanja, koja "čuvaju uglove", kažemo da su *konformna* preslikavanja. Inverzija je dakle jedno konformno preslikavanje.

Primer. Neka je ψ_k inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$ i A' i B' slike nekih tačaka A i B u toj inverziji. Dokazati da je tada:

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB.$$



Rešenje: Razmotrimo dva slučaja:

1) Neka su tačke O, A, B nekolinearne. Tada je, na osnovu leme 1, $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$, pa je $A'B':AB=OB':OA$. Kako je B' slika tačke B u inverziji ψ_k važi: $OB \cdot OB'=r^2$, tj. $OB'=\frac{r^2}{OB}$ iz čega sledi tražena relacija.

2) Neka su O, A, B kolinearne i neka je npr. $\mathcal{B}(O,A,B)$. Tada je $\mathcal{B}(O,B',A')$ pa je:

$$A'B'=OA'-OB'=\frac{r^2}{OA}-\frac{r^2}{OB}=\frac{(OB-OA)r^2}{OA \cdot OB}=\frac{AB \cdot r^2}{OA \cdot OB}.$$

Naravno, u slučaju (1) duž AB iz prethodnog primera ne preslikava se u duž $A'B'$, već u luk $A'B'$. Dokazana relacija samo daje vezu među dužinama duži AB i $A'B'$. ❑

9.2 Apolonijevi problemi o dodiru krugova

U ovom odeljku razmatraćemo tzv. *Apolonijeve*[59] *probleme o dodiru krugova* koji se mogu na elegantan način rešiti primenom inverzije. Radi se o problemima koji su sledećeg oblika:

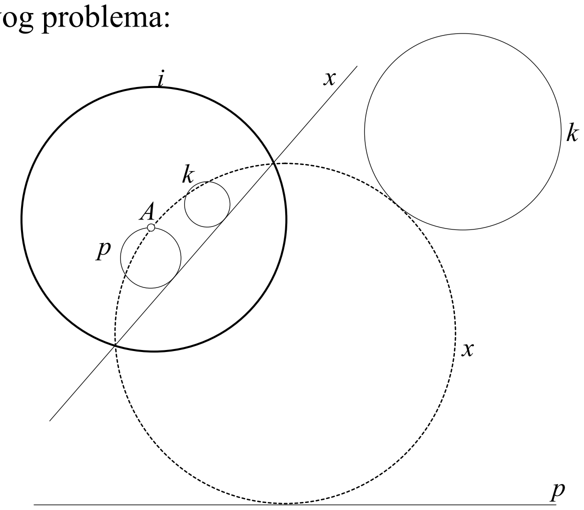
- Konstruisati krug k koji zadovoljava tri uslova od kojih je svaki jednog od oblika:
  - (i) sadrži datu tačku;
  - (ii) dodiruje datu pravu;
  - (iii) dodiruje dati krug.

Pretpostavlja se da su sve tačke, prave i krugovi iz pomenutih uslova u istoj ravni. Neke od tih problema sretali smo ranije. Npr: konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje datu pravu. Lako je zaključiti da ima deset Apolonijevih problema. Oni se obično navode sledećim redom:

[59] Starogrčki matematičar *Apolonije iz Perge* (*III-II* v. pre n. e.).

1. Konstruisati krug koji sadrži tri date tačke. (A,B,C)
2. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje datu pravu. (A,B,p)
3. Konstruisati krug koji sadrži dve date tačke i dodiruje dati krug. (A,B,k)
4. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje date dve prave. (A,p,q)
5. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje datu pravu i dati krug. (A,p,k)
6. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku i dodiruje data dva kruga. (A,k_1,k_2)
7. Konstruisati krug koji dodiruje date tri prave. (p,q,r)
8. Konstruisati krug koji dodiruje date dve prave i dati krug. (p,q,k)
9. Konstruisati krug koji dodiruje datu pravu i data dva kruga. (p,k_1,k_2)
10. Konstruisati krug koji dodiruje data tri kruga. (k_1,k_2,k_3)

Primetimo odmah da su prvi i sedmi problem trivijalni. I svi ostali problemi mogu se rešiti i bez primene inverzije. Inverzija, međutim, daje opšti metod za njihovo rešavanje. On se zasniva na činjenici da se u određenom slučaju krug inverzijom preslikava u pravu (teorema 6.(*iii*), iz prethodnog odeljka). Taj metod ilustrujmo na primeru petog Apolonijevog problema:



Neka su dakle, A tačka, p prava i k krug neke ravni i neka je x krug koji sadrži tačku A i dodiruje pravu p i krug k. Razmotrimo opšti slučaj kada ni p ni k ne sadrže tačku A. Sa i označimo krug sa centrom A i proizvoljnim poluprečnikom r. Neka je ψ_i inverzija u odnosu na taj krug i p', k', x' slike prave p i krugova k i x u toj inverziji. Kako $A\notin p,k$ i $A\in x$, na osnovu teoreme 6, iz prethodnog odeljka, p' i k' su krugovi a x' je prava. prava p i krug x imaju jednu zajedničku tačku pa to važi i za figure p' i x' tj. prava x' je tangenta kruga p'. Analogno, prava x' je tangenta kruga k'. Dakle, zadatak se svodi na konstrukciju prave x' kao zajedničke tangente krugova p' i k'. Dalje je $x=\psi_i^{-1}(x')=\psi_i\,(x')$. Interesantno je odrediti broj rešenja u zavisnosti od položaja krugova p' i k'. To, kao i razmatranje slučaja kada $A\in p$ ili $A\in k$, prepuštamo čitaocu.

Odmah možemo zaključiti, da u rešavanju ovog problema nije bilo od značaja da su p i k baš prava i krug, već da su p' i k' krugovi. Ali p' i k' bi bili krugovi i u slučaju kada su npr. p i k dve prave, a $A\notin p,k$. Dakle, četvrti i šesti Apolonijev problem rešavaju se na potpuno isti način kao i peti. Drugi i treći problem rešavaju se takođe primenom inverzije u odnosu na neki krug sa centrom A. Oba problema svode se na konstrukciju tangente iz tačke B na krug p' odnosno k'. Problemi 8, 9, 10 svode se redom na probleme 4, 5, 6. Ideja se sastoji u tome, da najpre konstruišemo koncentričan krug u odnosu na traženi, i to takav da sadrži centar datog kruga sa najmanjim poluprečnikom.

Zadaci

1. Neka je k krug opisan oko trougla ABC. Ako su P i Q tačke u kojima medijatrisa ivice BC seče prave AB i AC, i ψ_k inverzija u odnosu na krug k, dokazati da je: $\psi_k(P)=Q$.
2. Neka je A, A' par odgovarajućih tačaka inverzije ψ_k u odnosu na krug k. Dokazati da je odnos $XA{:}XA'$ konstantan za svaku tačku $X \in k$.
3. Neka je ψ_k inverzija u odnosu na krug k. Ako se tačka $X \notin k$ slika u tačku X' tom inverzijom, dokazati da je svaki krug koji sadrži tačke X i X' ortogonalan na krugu k.
4. Neka su k i l dva kruga neke ravni. Dokazati: $\psi_k(l)=l \Leftrightarrow k \perp l \vee k=l$.
5. Neka su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke i k krug nad prečnikom AB. dokazati ekvivalenciju: $\psi_k(C)=D \Leftrightarrow \mathcal{H}(A,B;C,D)$.
6. Ako su krug l i prava p inverzne figure u odnosu na neki krug k (tj. $\psi_k(l^O)=p$), dokazati da je prava p potencijalna osa krugova k i l.
7. Neka su A, B, O tri nekolinearne tačke i ψ_k inverzija u odnosu na krug $k(O,r)$. Ako su A' i B' slike tačaka A i B u toj inverziji, dokazati da tačke A, B, A', B' pripadaju krugu koji je ortogonalan na krugu k.
8. Neka su $l(O,R)$ i $k(S,r)$ opisani i upisani krug trougla ABC i l' slika kruga l u inverziji u odnosu na krug k. Dokazati da je poluprečnik kruga l' jednak $r/2$.
9. Neka je O centar kruga opisanog oko trougla ABC. Ako su B', C' tačke polupravih AB i AC takve da je $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$, dokazati da je $B'C' \perp AO$.
10. Neka su P, Q, R tačke u kojima krug upisan u trougao ABC dodiruje njegove ivice BC, AC, AB. Ako su Q' i R' tačke polupravih PQ i PR takve da je $PQ \cdot PQ' = PR \cdot PR'$, dokazati da je $BC \parallel Q'R'$.
11. Dokazati uopštenu Ptolomejevu teoremu: Ako su A, B, C, D četiri komplanarne tačke, tada je $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$. Jednakost važi ako i samo ako je $ABCD$ konveksan tetivan četvorougao.

12. Neka su c i p duži i γ ugao euklidske ravni. Konstruisati trougao ABC čija je visina AA', tako da je $AB \cong c$, $\angle BCA \cong \gamma$ i $BA' \cdot BC = p^2$.

13. Konstruisati krug koji sadrži date tačke A i B i dodiruje dati krug k.

14. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i dodiruje date krugove k i l.

15. Konstruisati krug koji dodiruje datu pravu p i date krugove k i l.

16. Konstruisati krug koji dodiruje tri data kruga k_1, k_2, k_3.

17. Konstruisati krug koji sadrži date tačke A i B i normalan je na dati krug k.

18. Konstruisati krug koji sadrži datu tačku A i normalan je na date krugove k i l.

19. Neka su: A tačka, p prava, k krug i ω ugao euklidske ravni. Konstruisati krug koji sadrži tačku A, dodiruje pravu p, a sa krugom k gradi ugao ω.

20. Neka je k krug opisan oko pravilnog trougla ABC. Ako je P proizvoljna tačka u ravni tog trougla, dokazati ekvivalenciju: tačka P ne pripada krugu k ako i samo ako postoji trougao čije su ivice podudarne dužima PA, PB, PC.

21. Ako su k_1, k_2, k_3, k_4 krugovi jedne ravni takvi da se: k_1 i k_2 dodiruju u tački A; k_2 i k_3 dodiruju u tački B; k_3 i k_4 dodiruju u tački C; k_4 i k_1 dodiruju u tački D; dokazati da su tačke A, B, C, D kolinearne ili konciklične.

22. Neka su k_1, k_2, k_3, k_4 krugovi jedne ravni takvi da se: k_1 i k_2 seku u tačkama A i A'; k_2 i k_3 seku u tačkama B i B'; k_3 i k_4 seku u tačkama C i C'; k_4 i k_1 seku u tačkama D i D'. Ako su tačke A, B, C, D konciklične dokazati da su tačke A', B', C', D' konciklične ili kolinearne. (*Mikelova teorema o šest krugova*.)

23. Neka su a, b, c_0 krugovi sa prečnicima PQ, PR, RQ, pri čemu je $\mathcal{B}(P,R,Q)$. Ako je c_0, c_1, c_2, ... niz krugova sa iste strane prave PQ, koji dodiruju krugove a, b i svaki u nizu dodiruje prethodni, dokazati da je

rastojanje centra kruga c_n od prave PQ, n puta veće od prečnika tog kruga.[60]

24. Neka su P i P_a dodirne tačke upisanog i spolja upisanog kruga trougla ABC sa njegovom ivicom BC. Ako je A_1 središte te ivice, odrediti slike tih krugova pri inverziji u odnosu na krug $k(A_1, A_1P)$.

25. Dokazati da Ojlerov krug trougla dodiruje upisani krug i spolja upisane krugove tog trougla u tzv. *Fojerbahovim*[61] *tačkama* tog trougla.

26. Dokazati da je tačka za koju je zbir rastojanja od temena nekog trougla minimalan, Toričelijeva tačka tog trougla.[62] (v. zad. 61. kod odeljka 5.4.)

---

[60] Ovaj problem razmatrao je *Papos iz Aleksandrije* (*IV* vek). Figuru određenu polukrugovima a, b, c_0 , proučavao je *Arhimed iz Sirakuze* (*III* v. pre n. e.).

[61] *K. V. Fojerbah* (1800-1834), nemački matematičar, dokazao je ovo tvrđenje 1822. g.

[62] Svojstvo koje je dokazao francuski matematičar *P. Ferma* (1601-1665), zbog čega se ova tačka naziva i *Fermaova tačka*.

Razni zadaci

1. Izračunati uglove trougla ABC, kod koga su centri opisanog i upisanog kruga simetrični u odnosu na ivicu BC.

2. Neka su BPC, CQA, ARB trouglovi spolja konstruisani nad ivicama trougla ABC. Ako je zbir uglova, kod temena P, Q, R tih trouglova jednak 180°, dokazati da se krugovi opisani oko trouglova BPC, CQA, ARB seku u jednoj tački.

3. Neka je AA_1 težišna duž trougla ABC ($AB<AC$), P tačka ivice AC i Q tačka poluprave BA takve da je $\mathcal{B}(B,A,Q)$ i $AP\cong AQ$. Ako je S presečna tačka pravih AA_1 i PQ, dokazati da je: $SP:SQ=AB:AC$.

4. Krugovi k i l, l i j, j i k dodiruju se spolja u nekolinearnim tačkama A, B, C. Dokazati da prave AB i AC seku krug j u dijametralno suprotnim tačkama.

5. Neka su: p prava, k i l krugovi i d duž neke ravni. Konstruisati pravu paralelnu pravoj p, koja seče date krugove redom u tačkama A, B i C, D takvim da je:
   (*i*) $AB+CD=d$;
   (*ii*) $AB-CD=d$.

6. Neka su: $k(O,r)$ krug, P i Q tačke i d duž neke ravni. Konstruisati tetivu XY tog kruga podudarnu duži d, takvu da je $\angle XPO\cong\angle YQO$.

7. Neka su: $k(O,r)$ krug, P i Q tačke, d duž i ω ugao neke ravni. Konstruisati tetivu XY tog kruga podudarnu duži d, takvu da je:
   $\angle XPO-\angle YQO=\omega$.

8. Neka su $AEFB$, $BKLC$, $CMNA$ kvadrati spolja konstruisani nad ivicama trougla ABC. Ako su P i Q temena paralelograma $BFPK$ i $CLQM$, dokazati da je trougao PAQ jednakokrako-pravougli.

9. Dokazati da je zbir kvadrata svih ivica paralelograma jednak zbiru kvadrata njegovih dijagonala.

10. (*i*) Neka je $ABCDE$ pravilan petougao ivice a. Izračunati dužinu ivice petougla, čija su temena određena presecima dijagonala petougla $ABCDE$.

(*ii*) Dokazati da se dijagonale pravilnog petougla seku po zlatnom preseku.

11. Izračunati rastojanja centra upisanog kruga trougla od temena, u funkciji njegovih ivica.

12. Ako je P proizvoljna tačka u ravni trougla ABC, i A', B', C' tačke simetrične tački P u odnosu na središta ivica BC, AC, AB tog trougla, dokazati da su prave AA', BB', CC' konkurentne.

13. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga je $AD \cong BC$ i P i Q središta ivica AB i CD. Dokazati da su:

(*i*) uglovi koje određuje prava PQ sa pravama AD i BC podudarni;

(*ii*) normalne projekcije ivica AD i BC na pravoj PQ podudarne sa duži MN.

14. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Ako su H_A, H_B, H_C, H_D ortocentri trouglova BCD, ACD, ABD, ABC, dokazati da duži AH_A, BH_B, CH_C, DH_D imaju zajedničko središte.

15. Neka je P unutrašnja tačka trougla ABC i A_1, B_1, C_1 podnožja upravnih iz te tačke na njegovim ivicama BC, AC, AB. Analogno, tačke A_2, B_2, C_2 određene su tačkom P i trouglom $A_1B_1C_1$, i tako redom; tačke A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} određene tačkom P i trouglom $A_nB_nC_n$. Koji su od trouglova $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... slični sa trouglom ABC ?

16. Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 trojke kolinearnih tačaka neke ravni, koje nisu sve na istoj pravoj. Dokazati da su tada i tačke $Z=AB_1 \cap A_1B$, $Y=AC_1 \cap A_1C$, $X=CB_1 \cap C_1B$ takođe kolinearne. (*Paposova*[63] *teorema*)

[63] *Papos iz Aleksandrije* (*IV* vek) dokazao je ovo tvrđenje u euklidskoj geometriji, koristeći podudarnost. Ta teorema može se, međutim, dokazati i bez korišćenja metrike. Ona je jedna od fundamentalnih teorema projektivne geometrije - teorije koja se razvila

17. Neka su A, B, C i A_1, B_1, C_1 trojke kolinearnih tačaka neke ravni, koje nisu sve na istoj pravoj. Ako je $AB_1 \| A_1B$ i $AC_1 \| A_1C$ dokazati da je $CB_1 \| C_1B$.

18. Neka su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke. Dokazati da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ akko su krugovi nad prečnicima AB i CD ortogonalni.

19. Neka su A i B tačke a l duž neke ravni. Konstruisati tačke C i D takve da je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ i $CD \cong l$.

20. Konstruisati pravu koja seče dva data koncentrična kruga u tetivama čiji je odnos 2:1.

21. Neka su: S, S_a centri upisanog i spolja upisanog kruga koji dodiruje ivicu BC trougla ABC; P, P_a dodirne tačke tih krugova sa tom ivicom; A' podnožje visine; E presek bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A sa ivicom BC; L, L_a podnožja upravnih iz tačaka S i S_a na pravoj AA'. Dokazati:

(*i*) $\mathcal{H}(A,E;S,S_a)$; (*ii*) $\mathcal{H}(A,A';L,L_a)$; (*iii*) $\mathcal{H}(A',E;P,P_a)$.

22. Ako su P, P_a dodirne tačke upisanog i spolja upisanog kruga koji dodiruje ivicu BC trougla ABC, sa tom ivicom i P' dijametralno suprotna tačka, tački P upisanog kruga, dokazati da su tačke A, P', P_a kolinearne.

23. Konstruisati trougao:

(*i*) h_a, r, α; (*ii*) h_a, t_a, b-c; (*iii*) r, b-c, h_a; (*iv*) r, b-c, t_a;
(*v*) h_a, r, a; (*vi*) h_a, l_a, b-c; (*vii*) h_a, $r+r_a$, a.

24. Ako su k i l dva kruga neke ravni sa centrima O i S, konstruisati krug sa centrom na pravoj OS, koji je upravan na tim krugovima.

25. Ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke, konstruisati tačke X i Y takve da je $\mathcal{H}(X,Y;A,B)$ i $\mathcal{H}(X,Y;C,D)$.

26. Ako je k krug u unutrašnjosti kruga l, dokazati da postoji inverzija koja preslikava krugove k i l u dva koncentrična kruga.

27. Neka je k krug u unutrašnjosti kruga l takav da postoji niz krugova a_1, a_2, ... , a_n koji dodiruju krugove k i l, i od kojih se svaka dva susedna,

---

u *XIX* veku. Na taj način, u projektivnoj geometriji, dokazao ju je francuski geometričar *Ž. V Ponsele* (1788-1867). U narednom zadatku dat je njen specijalni slučaj, kad su X, Y, Z tzv. *beskonačno daleke tačke*.

uključujući a_n i a_1, dodiruju. Ako je b_1 proizvoljni krug koji dodiruje k i l, i b_2, ... , b_n krugovi od kojih svaki dodiruje krugove k, l i prethodni u nizu, dokazati da se i b_n i b_1 dodiruju. (*Štajnerova teorema*)

28. Konstruisati trougao b, c, l_a.

29. Neka su k, l, j podudarni krugovi od kojih svaki dodiruje po dve ivice trougla ABC i koji se seku u tački P. Dokazati da su tačka P i centari opisanog i upisanog kruga tog trougla tri kolinearne tačke.

30. Neka su p i q dve prave, S tačka van njih i m i n dve duži neke ravni. Konstruisati krugove k i l koji se spolja dodiruju u tački S, od kojih prvi dodiruje pravu p a drugi pravu q i čiji se poluprečnici odnose kao duži m i n.

31. Dokazati da kompozicija dve inverzije u odnosu na dva koncentrična kruga predstavlja homotetiju.

32. Neka su O i S centri opisanog i upisanog kruga trougla ABC, kod koga je $\angle BAC=60^0$. Dokazati da su tačke B, C, O, S konciklične.

33. Dokazati da kompozicija neparnog broja osnih refleksija čije su ose iz jednog pramena predstavlja osnu refleksiju. Važi li obratno, tj. ako je kompozicija neparnog broja osnih refleksija osna refleksija, moraju li ose biti iz jednog pramena.

34. Ako su L i M tačke ivice AC i K tačka ivice AB trougla ABC, takve da je: $BK{:}KA=3{:}2$ i $AM{:}ML{:}LC=3{:}2{:}1$, odrediti odnos u kome prava BM deli duž KL.

35. Neka su X_1 i X_2 tačke ivica AB i AD, a Y_1, Y_2 tačke ivice CD paralelograma $ABCD$, takve da je: $AX_1{:}X_1B=5{:}1$, $AX_2{:}X_2D=3{:}2$, $CY_1{:}Y_1Y_2{:}Y_2D=2{:}1{:}2$. Neka su dalje, Z_1 i Z_2 tačke na dužima X_1Y_1 i X_2Y_2, takve da je $X_1Z_1{:}Z_1Y_1=1{:}5$ i $X_2Z_2{:}Z_2Y_2=1{:}1$.

Izraziti vektor $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

36. Konstruisati trougao:

   (*i*) t_a, γ, $a{:}b$; (*ii*) t_a, t_c, $a{:}b$; (*iii*) t_a, h_b, $a{:}b$.

37. Konstruisati paralelogram:

   (*i*) d_1, d_2, $a{:}b$; (*ii*) d_1, α, $a{:}b$;

38. Neka su P i Q unutrašnje tačke ugla AOB. Konstruisati tačku X na kraku AO tog ugla, takvu da poluprave XP i XQ seku krak OB u tačkama Y i Z pri čemu je $XY \cong XZ$.

39. Ako za svake tri od n ($n>3$) tačaka neke ravni postoji krug poluprečnika r takav da su sve tri u njegovoj unutrašnjosti, dokazati da postoji krug istog poluprečnika takav da je svih n tačaka u njegovoj unutrašnjosti.

40. U ravni je dato n tačaka, tako da najveće rastojanje između po dve od njih ne premašuje a. Dokazati da postoji krug poluprečnika $\frac{a}{\sqrt{3}}$ koji pokriva sve date tačke. (*Jungova teorema*)

41. Dokazati da se prave upravne na ivicama trougla i koje sadrže dodirne tačke spolja upisanih krugova sa tim ivicama, seku u jednoj tački.

42. Ako su S_a, S_b, S_c centri spolja upisanih krugova trougla ABC, dokazati da je krug opisan oko trougla ABC, Ojlerov krug trougla $S_aS_bS_c$.

43. Ako su $ABCD$ i $AB_1C_1D_1$ kvadrati iste orijentacije neke ravni, tačke P i Q središta duži BD_1 i B_1D a O i S centri tih kvadrata, dokazati da je četvorougao $POQS$ takođe kvadrat.

44. Ako su $k(S,r)$ i $k_a(S_a,r_a)$ upisani i odgovarajući spolja upisani krug trougla ABC, ivica $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ i poluobima s, a E tačka preseka prave AS sa ivicom BC, dokazati:

$$(i)\ \frac{AS}{SE} = \frac{AS_a}{S_aE} = \frac{b+c}{a}; \qquad (ii)\ \frac{r}{r_a} = \frac{s-a}{s}.$$

45. Ako su r, r_a, r_b, r_c poluprečnici upisanog i spolja upisanih krugova nekog trougla, dokazati da je:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

46. Neka su $k(A,a)$, $l(B,b)$, $j(C,c)$ krugovi od kojih se svaka dva dodiruju i koji dodiruju pravu p u tačkama A', B', C', pri čemu je $\mathcal{B}(A',C',B')$. Dokazati da je tada:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

47. Ako su A i B dve tačke i m, n, l tri duži neke ravni, odrediti skup svih tačaka te ravni takvih da je $mAX^2 + nBX^2 = l^2$.

48. Konstruisati četvorougao kome su ivice podudarne četirima datim dužima a, b, c, d i:

(*i*) zbir dva naspramna ugla jednak uglu ω;

(*ii*) duž određena središtima dve naspramne strane podudarna duži l.

49. Neka je P tačka kraćeg luka A_1A_{2n+1} kruga opisanog oko pravilnog poligona $A_1A_2...A_{2n+1}$. Ako je d_i=PA_i, dokazati da je:

$d_1+d_3+...+d_{2n+1}=d_2+d_4+...+d_{2n}$.

50. Ako su t_a, t_b, t_c težišne duži i s poluobim trougla, dokazati da je:

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq s^2.$$

51. Neka je $ABCD$ četvorougao i neka je $AB \cap CD=P$, $BC \cap AD=Q$, $AC \cap PQ=R$, $BD \cap PQ=S$. Dokazati da je $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$.

52. Neka je O tačka van pravih p i q i d duž neke ravni. Konstruisati krug sa centrom O na kome prave p i q određuju tetive čiji je zbir duž d.

53. Neka je AB=2r prečnik kruga k. Dokazati da je za proizvoljnu pravu p, koja seče taj prečnik pod uglom 45° u tački X i krug k u tačkama Y i Z, izraz $XY^2 + XZ^2$ konstantan.

54. Ako su a i b katete, a c i h_c hipotenuza i odgovarajuća visina pravouglog trougla, dokazati da je: $c+h_c>a+b$.

55. Konstruisati kvadrat $ABCD$, ako su teme A i središte E ivice BC, dve date tačke.

56. Neka su P i Q tačke na kracima p i q, ugla pOq i m i n dve duži neke ravni. Konstruisati pravu l koja seče krake p i q u tačkama X i Y tako da je XP:YQ=m:n i:

(*i*) l paralelna datoj pravoj s;

(*ii*) XY podudarna datoj duži d.

57. Ako je P proizvoljna tačka u ravni pravougaonika $ABCD$, dokazati da je $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

58. Ako je $ABCD$ tetivan četvorougao kod koga je BC+AD=CD, dokazati da se bisektrise unutrašnjih uglova kod temena A i B seku u tački koja pripada ivici CD.

59. Dokazati da je zbir rastojanja centra opisanog kruga oštrouglog trougla od njegovih ivica, jednak zbiru poluprečnika opisanog i upisanog kruga tog trougla.

60. Dokazati da je zbir rastojanja ortocentra oštrouglog trougla od njegovih temena, jednak zbiru prečnika opisanog i upisanog kruga tog trougla.

61. Ako je S presečna tačka dijagonala tetivnog četvorougla $ABCD$, dokazati da podnožja upravnih iz tačke S na ivicama tog četvorougla određuju temena tangentnog četvorougla.

62. Ako su P, Q, S, R središta lukova AB, BC, CD, DA kruga opisanog oko tetivnog četvorougla $ABCD$, na kojima nisu njegova temena, dokazati da je $PR \perp QS$.

63. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Ako su S_A, S_B, S_C, S_D centri upisanih krugova trouglova BCD, ACD, ABD, ABC dokazati da je četvorougao $S_AS_BS_CS_D$ pravougaonik.

64. Ako ja H ortocentar trougla ABC, dokazati da trouglovi ABC, HBC, AHC, ABH imaju zajednički Ojlerov krug, koji dodiruje upisane krugove tih trouglova.

65. Konstruisati kvadrat $ABCD$, ako je dato teme A, a temena B i C pripadaju datim pravama b i c.

66. Ako prava koja sadrži teme B pravilnog šestougla $ABCDEF$, seče njegove dijagonale AC i CE u tačkama M i N takvim da je $AM \cong CN$, dokazati da su duži AM i CN podudarne ivici tog šestougla.

67. Ako su E i N presečne tačke bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A trougla ABC sa ivicom BC i krugom opisanim oko tog trougla, dokazati da je:
$$AN = \frac{AB \cdot AC}{AE}.$$

68. Dokazati da je za proizvoljnu tačku kruga opisanog oko pravilnog trougla ABC, izraz $PA^2 + PB^2 + PC^2$ konstantan.

69. Neka su Y', Z, Y, Z' tačke jedne ravni takve da je $Y'Z \cong ZY \cong YZ'$ i $\angle Y'ZY \cong \angle ZYZ' = 180^\circ - 2\alpha > 60^\circ$. Ako je A tačka te ravni za koju je $A, Z \div Y'Z'$ i $\angle Y'AZ' = 3\alpha$, dokazati da tačke A, Y', Z, Y, Z' pripadaju istom krugu i da je $\angle Y'AZ \cong \angle ZAY \cong \angle YAZ' = \alpha$.

70. Ako su X, Y, Z tačke u kojima se seku *trisektrise* (poluprave koje dele ugao na tri podudarna) uglova trougla ABC, dokazati da je trougao XYZ pravilan. (*Morlejeva teorema*[64])

71. Neka su APB, CQD, ADR pravilni trouglovi spolja konstruisani nad ivicama paralelograma $ABCD$. Ako su O i S centri trouglova APB i CQD, dokazati da je trougao OSR pravilan.

72. Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke neke ravni. Odrediti centar i poluprečnik inverzije koja te tačke preslikava u tačke A', B', C' takve da je trougao $A'B'C'$:
   (*i*) pravilan, ivice podudarne datoj duži x;
   (*ii*) podudaran datom trouglu PQR.

73. Dokazati da centri kvadrata spolja konstruisanih nad ivicama proizvoljnog paralelograma, predstavljaju temena novog kvadrata.

74. Dokazati da podnožja upravnih iz temena konveksnog četvorougla na njegovim dijagonalama predstavljaju temena četvorougla sličnog polaznom.

75. Ako su A', B', C' podnožja visina trougla ABC, dokazati da se prave koje sadrže tačke A, B, C a upravne su na pravama $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ seku u centru opisanog kruga trougla ABC.

76. Neka su M, K, N, L središta ivica AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$. Dokazati da je:
   (*i*) $AC \perp BD \Leftrightarrow MN \cong KL$;
   (*ii*) $AC \cong BD \Leftrightarrow MN \perp KL$.

77. Ako su B', D', C' preseci ivica AB, AD i dijagonale AC paralelograma $ABCD$, sa proizvoljnim krugom koji sadrži tačku A, dokazati da je:
   $AC \cdot AC' = AB \cdot AB' + AD \cdot AD'$.

78. Ako su P i Q središta dijagonala e i f proizvoljnog četvorougla ivica a, b, c, d, dokazati da je:
   $4PQ^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2$. (*Ojlerova teorema*)

---

[64] *F. Morlej* (1860-1937), engleski matematičar, je otkrio ovo tvrđenje 1904 g., ali ga je publikovao dvadesetak godina kasnije. U to vreme, ta teorema je, kao zadatak, objavljena u časopisu "*Educational Times*". Jedno od tada predloženih rešenja bazira se na lemi iz 69. zadatka.

79. Neka su P, Q, R tačke pravih određenih ivicama BC, CA, AB trougla ABC. Dokazati da se prave upravne na pravama BC, CA, AB u tačkama P, Q, R, seku u jednoj tački ako i samo ako je:
$BP^2 - PC^2 + CQ^2 - QA^2 + AR^2 - RB^2 = 0$. (*Karnoova*[65] *teorema*)

80. Ako su ABC, $A'B'C'$ dva trougla neke ravni takva da se upravne iz tačaka A, B, C na pravama $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ seku u jednoj tački, dokazati da se tada i upravne iz tačaka A', B', C' na pravama BC, AC, AB seku u jednoj tački. (Takvi trouglovi zovu se *ortologički trouglovi*.)

81. Neka je S središte tetive PQ kruga k. Ako su AB i CD dve tetive tog kruga koje sadrže tačku S i X, Y preseci tetiva AD i BC sa tetivom PQ, dokazati da je S središte duži XY. (*Teorema o leptiru*[66])

82. Neka su a i b dva kruga poluprečnika r=1, koji se spolja dodiruju i t njihova zajednička tangenta. Ako je c_0, c_1,... c_n,... niz krugova koji dodiruju krugove a i b, prvi dodiruje pravu t, a svaki u nizu dodiruje prethodni. Izračunati prečnik kruga c_n.

83. Ako je S centar upisanog kruga trougla ABC, P dodirna tačka tog kruga sa ivicom BC i A_1 središte te ivice, dokazati da prava SA_1 deli duž AP na dve podudarne duži.

84. Neka je visina h_a trougla ABC iz temena A, najduža visina tog trougla i t_b težišna duž koja odgovara temenu B takva da je $h_a \cong t_b$. Dokazati da je $\angle ABC \geq 60^\circ$.

85. Ako su a, b, c ivice nekog trougla takve da je $a^2+b^2=5c^2$, dokazati da su težišne duži koje odgovaraju ivicama a i b međusobno upravne.

86. Ako su APB i ACQ pravilni trouglovi spolja konstruisani nad ivicama trougla ABC a S središte pravilnog trougla iznutra konstruisanog nad ivicom BC, dokazati da je rastojanje tačke S od prave PQ dva puta manje od dužine duži PS.

87. Neka su k i l dva kruga neke ravni sa centrima O i S. Ako su t_i tangente kruga k, koje seku krug l u tačkama A_i i B_i, dokazati da postoji krug koji dodiruje sve krugove opisane oko trouglova SA_iB_i.

---

[65] *L. Karno* (1753-1823), francuski matematičar.

[66] Jedan od dokaza ove teoreme objavio je engleski matematičar *V. Dž. Horner* (1786-1837), 1815 g.

88. Ako su a, b, c ivice nekog trougla, dokazati da je rastojanje središta ivice a od podnožja visine na toj ivici jednako: $\frac{|b^2 - c^2|}{2a}$.

89. Neka su A', B', C' podnožja visina trougla ABC. Dokazati da podnožja upravnih iz tačaka A', B', C' na po dve prave određene ivicama trougla, koje ne sadrže te tačke, pripadaju jednom krugu, tzv. *Tejlorovom krugu*[67] tog trougla.

90. Neka je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko trougla ABC i P_A presečna tačka prave upravne na pravoj BC kroz tu tačku sa tim krugom. Dokazati da je prava AP_A paralelna sa Simsonovom pravom tog trougla u odnosu na tačku P. (v. zad. 19. kod odeljka 5.4)

91. Ako su P i Q dve tačke kruga $k(O,r)$ opisanog oko trougla ABC i p, q Simsonove prave tog trougla u odnosu na te tačke, dokazati da je: $\angle pq=\frac{1}{2}\angle POQ$.

92. Ako je P proizvoljna tačka kruga opisanog oko trougla ABC, p Simsonova prava tog trougla u odnosu na tačku P i H ortocentar tog trougla, dokazati da prava p sadrži središte duži PH.

93. Ako su P i Q dve dijametralno suprotne tačke kruga opisanog oko trougla ABC i p, q Simsonove prave tog trougla u odnosu na te tačke, dokazati da su te prave upravne i da se seku na Ojlerovom krugu tog trougla.

94. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao. Ako su a, b, c, d Simsonove prave tačaka A, B, C, D u odnosu na trouglove BCD, ACD, ABD, ABC redom, dokazati da se one seku u jednoj tački.

95. Neka je $ABCDE$ petougao sa pravim uglovima kod temena A i D. Ako se medijatrise ivica EA, BC, DE (prave p, q, r) seku u tački O, a medijatrise ivica AB i CD (prave x i y) seku u tački S, pri čemu tačke O, S, E pripadaju pravoj l, dokazati da je ta prava simetrala ugla xSy.

96. Ako je P unutrašnja tačka kvadrata $ABCD$ takva da je PA:PB:PC=1:2:3, izračunati meru ugla APB.

97. Dokazati da ne postoje rotacije sa raznim centrima, koje preslikavaju neku ograničenu figuru u sebe.

[67] *B. Tejlor* (1685-1731), engleski matematičar.

98. Neka je Φ ograničena fugura. Dokazati da su jedine moguće izometrije koje preslikavaju figuru Φ u sebe: koincidencija, rotacije sa istim centrom i osne refleksije čije ose sadrže taj centar.

99. Neka su O i H centar opisanog kruga i ortocentar trougla ABC. Ako je $H'=\mathcal{S}_O(H)$, a T_1 težište trougla $H'BC$, dokazati da su tačke A, O, T_1 kolinearne i odrediti $AO:OT_1$.

100. Ako su A, B, C, D tačke neke ravni koje nisu sve na istom krugu, niti sve na istoj pravoj, dokazati da postoje krugovi k i l koji nemaju zajedničkih tačaka, i od kojih prvi sadrži tačke A i B a drugi tačke C i D.

101. Neka su ABC i $A'B'C'$ jednakokraki trouglovi iste orijentacije sa osnovama BC i $B'C'$ i neka je $\angle BAC \cong \angle B'A'C' \cong \alpha$. Ako su A_0, B_0, C_0 središta duži AA', BB', CC', dokazati da je trougao $A_0B_0C_0$ sličan sa trouglovima ABC i $A'B'C'$.

102. Neka su $A_1A_2...A_n$ i $B_1B_2...B_n$ pravilni isto orijentisani n-touglovi neke ravni. Ako su S_1, S_2, ..., S_n središta duži A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, dokazati da je n-tougao $S_1S_2...S_n$ takođe pravilan.

103. Konstruisati krug koji je normalan na dva data kruga, a treći dati krug seče u dijametralno suprotnim tačkama.

104. Neka su $k(O,R)$ i $l(S,r)$ krugovi koji se iznutra dodiruju, pri čemu je $R=2r$, i P tačka kruga l. Odrediti "putanju" tačke P ako se krug l "kreće" po krugu k, bez "klizanja"[68].

105. Neka je ST prečnik kruga k, t tangenta tog kruga u tački T i PQ i PR tangente tog kruga u tačkama Q i R. Ako su P', Q', R' preseci polupravih SP, SQ, SR sa pravom t, dokazati da je P' središte duži $Q'R'$.

106. Neka su A, B, C tri tačke za koje je $\mathcal{B}(A,B,C)$ i k, l, j krugovi nad prečnicima AB, BC, AC. Ako proizvoljna prava, koja sadrži tačku B, seče krugove k i l u tačkama K i L, a krug j u tačkama P i Q, pri čemu je $\mathcal{B}(P,K,B)$, dokazati da je $PK \cong LQ$.

107. Ako je S presečna tačka dijagonala AC i BD konveksnog četvorougla $ABCD$, a P i Q centri opisanih krugova oko trouglova ASB i CSD, dokazati da je $AB + CD \leq 4PQ$.

108. Neka je $ABCD$ kvadrat i P i Q presečne tačke tangente kruga $k(A,AB)$, u dodirnoj tački T, sa njegovim ivicama BC i CD. Ako prave AP i AQ seku dijagonalu BD u tačkama R i S, dokazati:
(*i*) da se prave PS, QR, AT seku u jednoj tački;
(*ii*) da su tačke P, C, Q, S, R konciklične.

109. Neka su P, Q, R centri spolja konstruisanih pravilnih trouglova nad ivicama BC, AC, AB trougla ABC, a P', Q', R' analogno, centri iznutra konstruisanih pravilnih trouglova i tačke Y i A_1 središta duži PR i BC. Dokazati:
(*i*) trouglovi PQR i $P'Q'R'$ su pravilni (tzv. *spoljašnji* i *unutrašnji Napoleonovi trouglovi*, v. zad. 32. glava VII) ili se specijalno neke od tačaka P', Q', R' poklapaju;
(*ii*) trouglovi $QP'C$ i RBP' slični su sa trouglom ABC;
(*iii*) četvorouglovi $ARP'Q$ i $CP'RQ'$ su paralelogrami;
(*iv*) $\overrightarrow{YA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$.

110. Dokazati da spoljašnji i unutrašnji Napoleonov trougao nekog trougla ABC imaju isti centar, koji je ujedno težište trougla ABC.

111. Neka je $ABCD$ proizvoljan četvorougao. Dokazati da se ravan može "prekriti" četvorouglovima, podudarnim sa datim četvorouglom $ABCD$, tako da se u svakom temenu sustiče njih četiri.

112. Neka je t zajednička spoljašnja tangenta krugova k i l koji se dodiruju u tački A, i c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ... niz krugova koji dodiruju krugove k i l, ako svaki u nizu dodiruje prethodni, a c_0 dodiruje i pravu t. Dokazati da postoji krug (ili prava) koji je normalan na svaki od krugova u datom nizu.

113. Neka je $ABCD$ tangentni i tetivan četvorougao. Ako su P, Q, R, S dodirne tačke ivica AB, BC, CD, DA redom sa krugom upisanim u taj četvorougao, dokazati da je $PR \perp QS$.

114. Ako su a, b, c, d ivice, e i f dijagonale nekog četvorougla, a x duž određena središtima ivica b i d, dokazati da je:

$$x^2 = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + e^2 + f^2).$$

[68] Ovaj problem rešio je poljski astronom *N. Kopernik* (1473-1543).

Rešenja zadataka

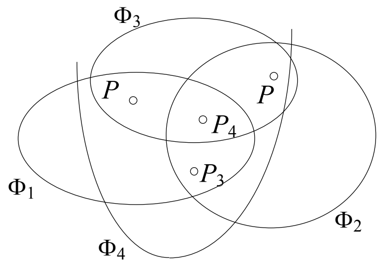
Glava II

2.29. Dokaz ćemo izvršiti indukcijom po n. Neka je najpre n=4, i:

$P_4 \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3$; $P_3 \in \Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_4$;

$P_2 \in \Phi_1 \cap \Phi_3 \cap \Phi_4$; $P_1 \in \Phi_2 \cap \Phi_3 \cap \Phi_4$.

Razmotrićemo samo dva, od više mogućih slučajeva (dokaz u ostalim slučajevima je sličan):



zad. 2.29

1) Četvorougao koji određuju tačke P_1, P_2, P_3, P_4 je nekonveksan; tada je neka od tačaka P_1, P_2, P_3, P_4 unutrašnja tačka trougla koje određuju preostale tri tačke. Ne umanjujući opštost neka je P_4 unutrašnja tačka trougla $P_1P_2P_3$. Temena tog trougla pripadaju figuri Φ_4, pa kako je ona konveksna, njoj pripadaju i sve ivice i unutrašnje tačke tog trougla, pa i tačka P_4. Dakle, u ovom slučaju tačka P_4 pripada figurama Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

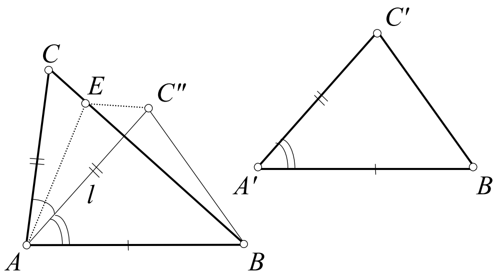
2) Četvorougao koji određuju tačke P_1, P_2, P_3, P_4 je konveksan. Ne umanjujući opštost neka su njegove dijagonale P_1P_3 i P_2P_4. Date figure su konveksne, pa $[P_1P_3] \subset \Phi_2, \Phi_4$ i $[P_2P_4] \subset \Phi_1, \Phi_3$. Kako je četvorougao konveksan, njegove dijagonale se seku u nekoj tački S koja pripada figurama Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4.

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za n=k. Dokažimo da ono tada važi i za n=k+1. Neka su figure $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_k, \Phi_{k+1}$ takve da svake tri od njih imaju bar jednu zajedničku tačku. Neka je $\Phi' = \Phi_k \cap \Phi_{k+1}$. Dokažimo najpre da svake tri od k figura $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi'$ imaju zajedničku tačku. Za trojke među figurama $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{k-1}$ to je jasno po pretpostavci. Ne umanjujući opštost, dovoljno je još dokazati da figure Φ_1, Φ_2, $\Phi'=\Phi_k \cap \Phi_{k+1}$ imaju zajedničku tačku. To važi, na osnovu dokazanog slučaja za n=4, jer svake tri od figura $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_k, \Phi_{k+1}$ imaju zajedničku tačku. Sada, na osnovu indukcijske hipoteze, zaključujemo da figure $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1}, \Phi'$ imaju zajedničku tačku, pa ta tačka pripada i figurama $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{k-1}, \Phi_k, \Phi_{k+1}$.

2.30. Neka su β_1, β_2, ... β_n poluravni, određene poluravnima α_1, α_2, ... α_n, kao njihove dopune do ravni α. Pretpostavimo suprotno, da nikoje tri od poluravni α_1, α_2, ... α_n ne prekrivaju ravan α. To bi značilo da za svake tri od njih postoji tačka ravni α, koja im ne pripada; odnosno da za svake tri od poluravni β_1, β_2, ... β_n postoji tačka ravni α, koja im pripada. Kako su poluravni konveksne figure, na osnovu *Helijeve teoreme (v. zad. 2.29*), postoji neka tačka X koja pripada svim poluravnima β_1, β_2, ... β_n. Ta tačka pripada ravni α, a ne pripada ni jednoj od poluravni α_1, α_2, ... α_n. To je kontradikcija sa pretpostavkom, pa zaista postoje tri od poluravni α_1, α_2, ... α_n, koje prekrivaju ravan α.

Glava III

3.7.4. $\Leftarrow$. Neka je $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Tada postoji poluprava l, unutar ugla BAC, tako da je $\angle BA,l \cong \angle B'A'C'$. Sa C" označimo tačku poluprave l, za koju je $AC'' \cong A'C'$. Tada su, na osnovu stava *SUS*, trouglovi ABC'' i $A'B'C'$ podudarni, pa je $BC'' \cong B'C'$. Dovoljno je, dakle, dokazati da je $BC > BC''$. Ako je C'' tačka ivice BC, to je trivijalno ispunjeno. Pretpostavimo da tačka C'' ne pripada ivici BC. Neka je E presečna tačka bisektrise ugla CAC'' sa ivicom BC. Na osnovu stava *SUS*, podudarni su i trouglovi ACE i $AC''E$, pa je $CE \cong C''E$. Sada je:



zad. 3.7.4

$BC = BE + EC = BE + EC'' > BC'' = B'C'$.

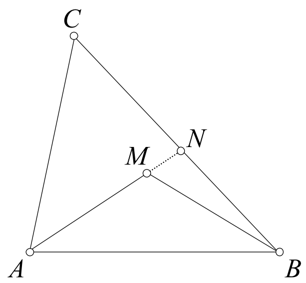
$\Rightarrow$. Neka je $BC > B'C'$. Ne može biti $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, jer bi tada, na osnovu stava *SUS*, trouglovi ABC i $A'B'C'$ bili podudarni, pa i $BC \cong B'C'$.

Ako bi bilo $\angle BAC < \angle B'A'C'$, na osnovu prethodno dokazanog sledilo bi $B'C' > BC$. Dakle, mora biti $\angle BAC > \angle B'A'C'$.

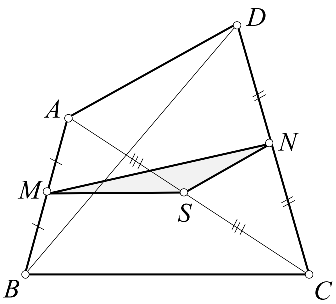
3.11. $\angle ACB = 45°$.

3.21. Neka je N presečna tačka pravih AM i BC. Kako je M unutrašnja tačka trougla ABC, mora biti $\mathcal{B}(A,M,N)$ i $\mathcal{B}(C,N,B)$. Tada, koristeći *teoremu o nejednakosti trougla*, dobijamo:

$$AM+MB<AM+MN+NB=AN+NB<AC+CN+NB=AC+CB.$$



zad. 3.21



zad. 3.27

3.22. Za drugu nejednakost koristiti *zad. 3.21*.

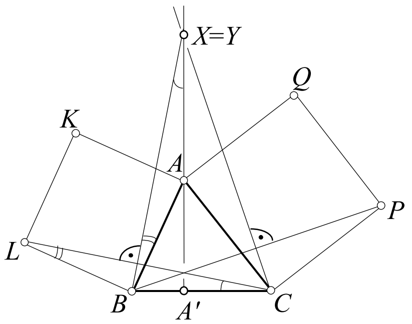
3.27. Neka je S središte dijagonale AC četvorougla $ABCD$. Tada koristeći *teoreme o srednjoj liniji* i *nejednakosti trougla* dobijamo:

$$BC+AD=2MS+2SN=2(MS+SN)\leq 2MN.$$

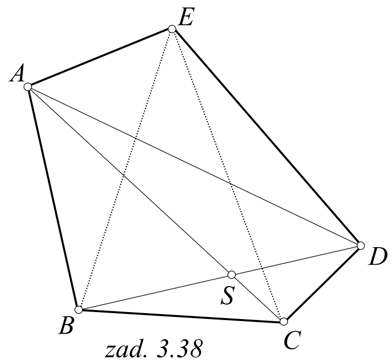
Jednakost važi u slučaju kada su tačke M, S, N kolinearne, odnosno kada je četvorougao $ABCD$ trapez, sa osnovicom BC.

3.29. Koristiti nejednakosti: $h_a \leq b$, $h_a \leq c$, $h_b \leq a$, $h_b \leq c$, $h_c \leq a$, $h_c \leq b$.

3.33. Neka su X i Y preseci prave AA', sa normalama na prave CL i BP iz tačaka B i C redom. Dokažimo da je $X=Y$. Trouglovi BLC i ABX su podudarni jer je: $BL \cong AB$ i $\angle BLC \cong \angle ABX$, $\angle BCL \cong \angle AXB$, kao uglovi sa normalnim kracima. Na osnovu toga je $AX \cong BC$. Analogno su i trouglovi CPB i ACY podudarni pa je i $AY \cong BC$. Dakle važi $AX \cong AY$, odnosno $X=Y$. Sada prave AA', BP, CL sadrže visine trougla XBC, pa se seku u jednoj tački.



zad. 3.33

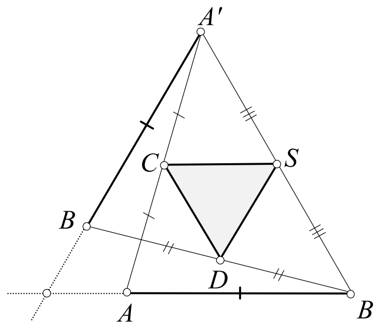


zad. 3.38

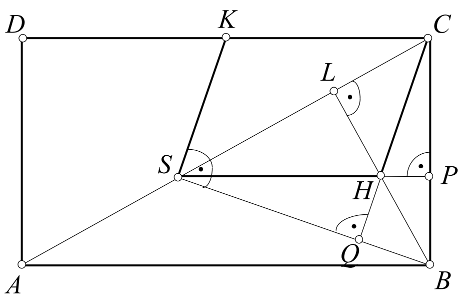
3.38 Neka je AD najduža dijagonala petougla $ABCD$. Dokažimo da su AD, AC, BD tražene dijagonale, tj. one za koje postoji trougao čije su ivice sa njima podudarne. Kako je AD veće od AC i BD dovoljno je dokazati da je $AC+BD>AD$. Petougao $ABCD$ je konveksan, pa se njegove dijagonale AC i BD seku u nekoj tački S. Tada je:

$AC+BD>AS+SD>AD$.

3.41 Neka je tačka S središte duži $A'B$. Tada su CS i DS srednje linije trouglova $A'AB$ i $BA'B'$, pa je $CS=\frac{1}{2}AB=CD=\frac{1}{2}A'B'=DS$, odnosno trougao SCD je pravilan. Dakle, $\angle AB,A'B'\cong\angle CSD$, kao uglovi sa paralelnim kracima, pa je $\angle AB,A'B'=60^\circ$.



zad. 3.41



zad. 3.48

3.48 Neka je tačka P podnožje upravne iz tačke S na ivici BC pravougaonika $ABCD$. Tada je tačka $H=BL\cap SP$ ortocentar trougla CSB. Zbog toga je $CH\perp SB$. Dalje, SH je srednja linija trougla LAB, pa je:

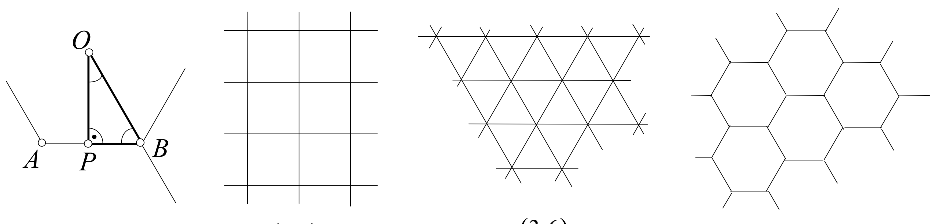
$SH=\frac{1}{2}AB=KC$; $SH\|AB\|KC$.

Prema tome, četvorougao $SHCK$ je paralelogram pa, kako je $CH\perp SB$, mora biti i $KS\perp SB$.

3.51. Neka je O centar i AB jedna ivica jednog od pravilnih n-touglova, kojih se po m sustiče u svakom temenu. Sa P označimo središte ivice AB. Kako je polazni n-tougao pravilan, uglovi kod temena O i P trougla OPB su redom $\frac{360°}{2n}$ i 90°. Po pretpostavci se oko temena B sustiče m takvih n-touglova, pa je ugao kod temena B, trougla OPB jednak $\frac{360°}{2m}$. Tada je:

$$\frac{180°}{n}+\frac{180°}{m}=90°, \text{ odnosno } \frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}, \text{ tj. } nm-2n-2m=0 \text{ ili:}$$

$$(n-2)(m-2)=4.$$

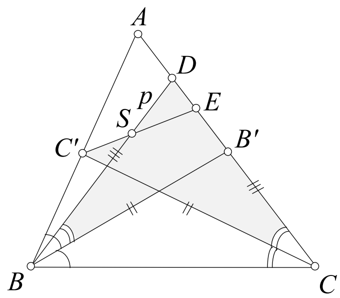


(4,4) (3,6) (6,3)

zad. 3.51

Kako su n i m prirodni brojevi veći od 2, jedina takva rešenja prethodne jednačine su: (4,4), (3,6), (6,3).

3.53. $\Rightarrow$. Iz $AB\cong AC$, sledi $\angle ABC\cong\angle ACB$, zatim $\angle B'BC\cong\angle C'CB$, pa, na osnovu stava SUS, $\Delta B'BC\cong\Delta C'CB$, i konačno $BB'\cong CC'$.



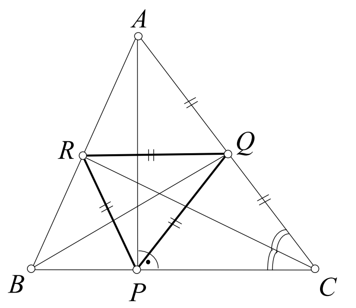
zad. 3.53

$\Leftarrow$. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije $AB\cong AC$. Ne umanjujući opštost neka je $AB<AC$. Tada je $\angle ACB<\angle ABC$, odnosno $\angle ACC'<\angle ABB'$, pa unutar ugla ABB' postoji poluprava p, sa početnom tačkom B, koja ivicu AC seče u tački D, takvoj da je $\mathcal{B}(A,D,B')$ i $\angle DBB'\cong\angle ACC'$. U trouglu BCD je $\angle ACB<\angle DBC$, a odatle i $BD<CD$. Dakle, postoji tačka E, između tačaka C i D, takva da je $BD\cong CE$. Prema stavu SUS, podudarni

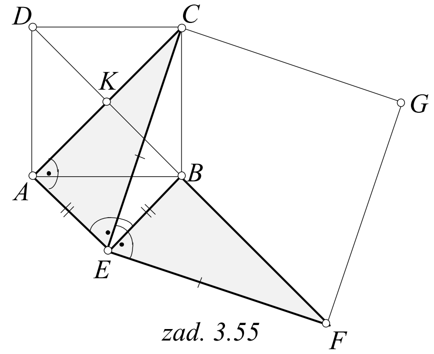
su trouglovi BDB' i CEC', a na osnovu toga i uglovi BDB' i CEC'. Na osnovu *Pašove aksiome*, primenjene na trougao $AC'E$ i pravu BD, prava BD seče duž $C'E$ u nekoj tački S. U trouglu SDE, ugao SEC je spoljašnji pa ne može biti podudaran nesusednom unutrašnjem uglu SDE. Dakle, ne može biti $AB<AC$.

3.54. Neka je trougao PQR pravilan. Tačka Q je središte hipotenuze AC pravouglog trougla APC, pa je $QA \cong QC \cong QP$. Kako je tada i $QR \cong QA \cong QC$, i ugao ARC je prav, pa iz podudarnosti trouglova ACR i BCR, zaključujemo da je tačka R središte ivice AB, kao i da je $AC \cong BC$. I konačno, tačka R je središte hipotenuze AB, pravouglog trougla APB, pa je:

$$AB=2PR=2PQ=2AQ=AC.$$



zad. 3.54



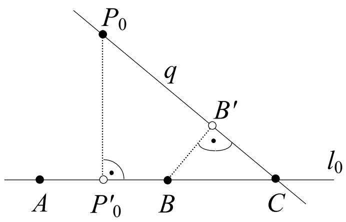
zad. 3.55

3.55. Trouglovi CAE i FBE su podudarni ($CE \cong FE$, $AE \cong BE$, $\angle AEC \cong \angle BEF$), pa je ugao EBF prav, odnosno tačke D, B, F su kolinearne. Iz podudarnosti trouglova sledi i $BF \cong AC \cong BD$.

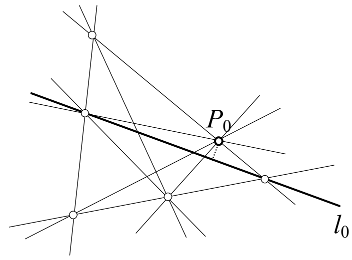
3.57 Pretpostavimo suprotno, da prava l_0 sadrži bar tri razne tačke A, B, C iz skupa $\mathcal{P}$. Tada prava $q=P_0C$ ($q \neq l_0$ jer $P_0 \notin l_0$) pripada skupu $\mathcal{L}$. Označimo sa P'_0 podnožje upravne iz tačke P_0, na pravoj l_0. Ukoliko se tačka P'_0 razlikuje od tačaka A, B, C, tada su bar dve od tih triju tačaka (neka su to B i C) sa iste strane tačke P'_0. Ne umanjujući opštost neka je $\mathcal{B}(P_0,B,C)$. Neka je B' podnožje upravne iz tačke B, na pravoj q. Lako se dokazuje da bi tada važilo:

$$d(B,q)=BB'<P_0P'_0=d(P_0,l_0).$$

Poslednja relacija je u suprotnosti sa pretpostavkom, pa prava l_0 sadrži tačno dve tačke. U slučaju da je npr. $B=P_0$, dokaz izvodimo na isti način.



zad. 3.57



zad. 3.58

3.58 Formirajmo skup pravih $\mathcal{L}$ kao u prethodnom primeru (*v. zad 3.57*), kao skup svih pravih od kojih svaka sadrži bar dve tačke skupa $\mathcal{P}$. Kako je skup $\mathcal{P}$ konačan, to je i skup $\mathcal{L}$ konačan, pa onda i skup rastojanja:

$$\mathcal{D}=\{d(P,l) \mid P\in \mathcal{P},\, l\in\mathcal{L},\, P\notin l\}$$

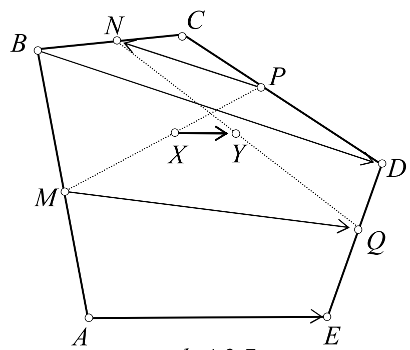
Kako je konačan, skup $\mathcal{D}$ ima svoj minimalni element $d(P_0,l_0)$ (od kojeg nijedan iz $\mathcal{D}$ nije manji), koji se dostiže za neku tačku $P_0\in \mathcal{P}$ i neku pravu $L_0\in \mathcal{L}$. Na osnovu *zad. 3.57*, prava l_0 sadrži tačno dve tačke skupa $\mathcal{P}$.

Glava IV

4.2.7. Na osnovu *zad. 4.2.2* je:

$$\overrightarrow{XY}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\,.$$



zad. 4.2.7

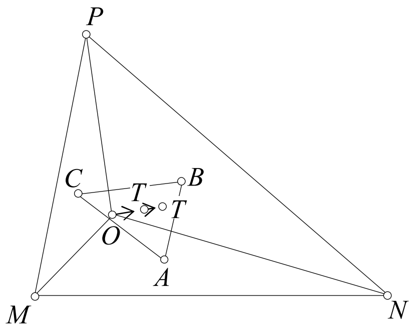
4.3.7. Neka su T i T_1 težišta trouglova MNP i ABC. Tada, na osnovu *zad. 4.3.4*, sledi:

$$\overrightarrow{OT_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

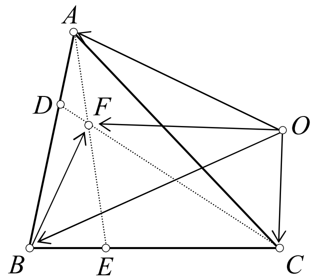
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM})\right)$$

$$= \frac{2}{9}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{OT},$$

pa su tačke O, T_1, T kolinearne, a važi i $\dfrac{\overrightarrow{OT_1}}{\overrightarrow{T_1T}} = \dfrac{2}{1}$.



zad. 4.3.7



zad. 4.3.11

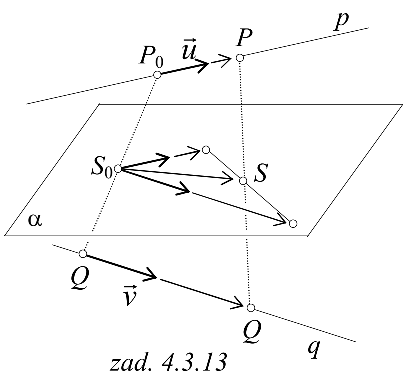
4.3.11. Dovoljno je vektor BF izraziti pomoću vektora BA i BC jer je: $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF}$. Na osnovu *primera*, iz *odeljka 4.3,* je:

$$\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC} = \lambda\frac{n}{n+m}\overrightarrow{BA} + (1-\lambda)\overrightarrow{BC} \text{ i}$$

$$\overrightarrow{BF} = \mu\overrightarrow{BA} + (1-\mu)\overrightarrow{BE} = \mu\overrightarrow{BA} + \frac{m}{m+m}(1-\mu)\overrightarrow{BC};$$

za neke realne λ i μ, koje, izjednačavajući desne strane prethodnih jednakosti, možemo izračunati (dovoljno je izračunati npr. λ).

4.3.13. Neka su $\vec{u}$ i $\vec{v}$ proizvoljni vektori paralelni pravama p i q i neka je S_0 središte duži P_0Q_0, gde su P_0 i Q_0 redom neke tačke pravih p i q. Traženi skup tačaka je ravan α koja sadrži tačku S_0, i paralelna je pravama p i q. Zaista, ako je S središte duži PQ, gde su P i Q proizvoljne tačke pravih p i q, tada je (prema *zad. 4.2.2*):



zad. 4.3.13

$$\overrightarrow{S_0S} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{Q_0Q}) = \frac{1}{2}(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}),$$

pa je vektor $\overrightarrow{S_0S}$ paralelan sa vektorima $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tj. tačka S pripada ravni α. Analogno svaka tačka X ravni α je odgovarajuća kombinacija vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$, pa je X središte neke duži čije su krajnje tačke na pravama p i q.

4.4.4. (*i*) Dokazati da zbirni vektor u isto vreme mora biti pravca npr. OA_1 i OA_2.

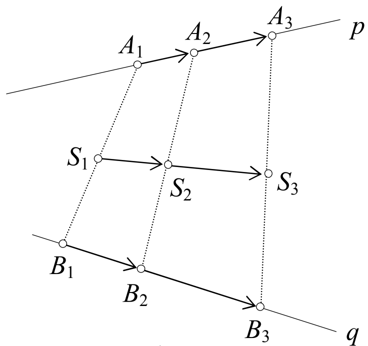
4.4.6. Dovoljno je dokazati da su tri uzastopna središta kolinearne tačke. Ne umanjujući opštost, dokažimo da su tačke S_1, S_2, S_3 kolinearne. Neka je:

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_2A_3}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_2B_3}} = \lambda$$

Tada je:

$$\overrightarrow{S_2S_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{B_2B_3})$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda\overrightarrow{A_1A_2} + \lambda\overrightarrow{B_1B_2}) = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{S_1S_2}$$



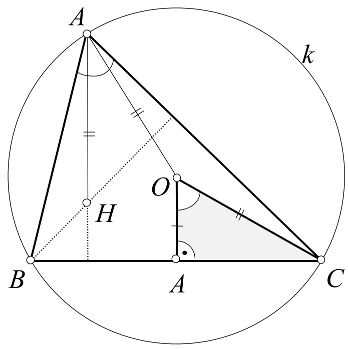
zad. 4.4.6

pa su tačke S_1, S_2, S_3 zaista kolinearne.

4.4.11. Ako je tačka R središte duži QC, dokazati da je $AQ{:}QR{:}RC$=1:1:1.

4.4.16. Primeniti *Hamiltonovu teoremu* na trougao ABC.

4.4.19. Neka je A_1 središte ivice BC trougla ABC. Na osnovu *teoreme iz odeljka 4.4*, je $AH=2OA_1$. Kako je $OA=OC$ sledi da je u pravouglom trouglu OA_1C, $OC=2OA_1$, pa je $\angle A_1OC=60^\circ$, a onda i $\angle BAC=60^\circ$.

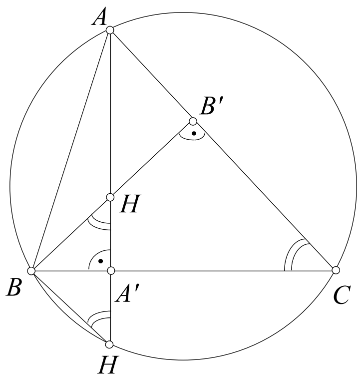


zad. 4.4.19

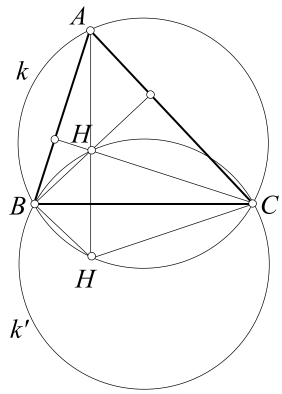
4.4.20. Pomoću *Talesove teoreme* odrediti najpre $BE{:}EC$, a zatim koristiti *primer* iz *odeljka 4.3*.

Glava V

5.14. Neka je H ortocentar trougla ABC, k krug opisan oko trougla ABC i H' druga presečna tačka kruga k sa pravom određenom visinom AA'. Dokažimo da je H' simetrična tačka, tački H, u odnosu na pravu BC. Dovoljno je dokazati da je $HA'\cong H'A'$. Uglovi $BH'A$ i BCA su podudarni kao periferijski uglovi nad tetivom AB, a uglovi BCA i BHA' podudarni kao uglovi sa normalnim kracima. Dakle, podudarni su i uglovi $BH'A'$ i BHA', a na osnovu toga i trouglovi $BH'A'$ i BHA', pa je zaista $H'A'\cong HA'$.



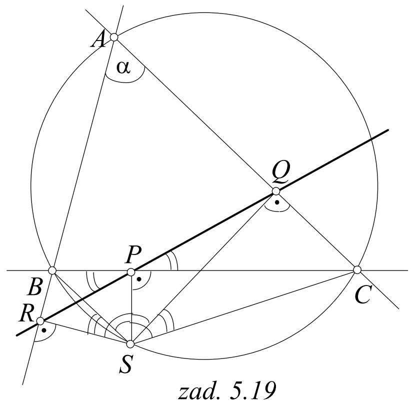
zad. 5.14



zad. 5.15

5.15. Neka je H ortocentar trougla ABC. Na osnovu *zad. 5.14*, tačka H', koja je simetrična tački H u odnosu na pravu BC, pripada krugu k, opisanom oko trougla ABC. Tada je k krug opisan i oko trougla $BH'C$, pa je simetričan krugu opisanom oko trougla BHC, i njemu podudaran.

5.19. Neka je S proizvoljna tačka kruga k opisanog oko trougla ABC, i P, Q, R podnožja upravnih iz te tačke na pravama BC, AC, AB. Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je $\mathcal{B}(B,P,C)$, $\mathcal{B}(A,Q,C)$, $\mathcal{B}(A,B,R)$. Tada su tačke Q i R sa raznih strana prave BC, pa je dovoljno dokazati da je $\angle BPR \cong \angle CPQ$. Četvorouglovi $BRSP$, $ABSC$, $ARSQ$, $SPQC$ su tetivni pa je:



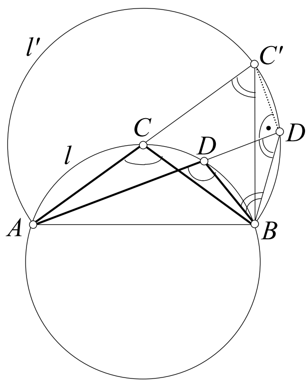
zad. 5.19

$$\angle BPR = \angle BSR = \angle RSC - \angle BSC$$
$$= \angle RSC - (180^{\circ} - \angle BAC)$$
$$= \angle RSC - \angle RSQ = \angle CSQ = \angle CPQ.$$

5.20. $\alpha = 14^{\circ}$.

5.27. Dokazati da duži O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 imaju zajedničko središte, tj. da su odgovarajući četvorouglovi paralelogrami.

5.30. Neka su C' i D' tačke na polupravama AC i AD, takve da je $CC' \cong CB \cong CA$, $DD' \cong DB$ i $\mathcal{B}(A,C,C')$, $\mathcal{B}(A,D,D')$. Trouglovi $C'CB$ i $D'DB$ su jednakokraki, pa koristeći odnos spoljašnjeg ugla prema nesusednim unutrašnjim uglovima tih trouglova, dobijamo:



zad. 5.30

$$\angle CC'B \cong \angle CBC' = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\angle DD'B \cong \angle DBD' = \frac{1}{2}\angle ADB.$$

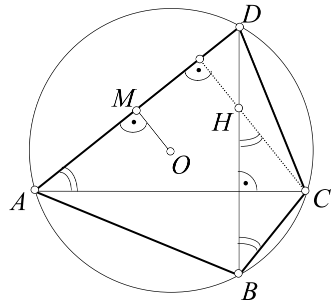
Kako su uglovi ACB i ADB podudarni, kao periferijski uglovi, podudarni su i uglovi $AC'B$ i $AD'B$, pa tačke C' i D' pripadaju odgovarajućem luku l', nad tetivom AB. Kako je $CC' \cong CB \cong CA$, AC' je prečnik kruga koji sadrži luk l', pa je ugao $AD'C'$ prav. Duž AC' je, dakle, hipotenuza pravouglog trougla $AD'C'$, pa je:

$AC+CB=AC'>AD'=AD+DB$.

5.34. Neka je H ortocentar trougla ACD. Kako je $AC\perp BD$, tačka H pripada dijagonali BD. Na osnovu *teoreme* iz *odeljka 4.4* je $OM=\frac{1}{2}HC$. Kako je, međutim:

$\angle CBH\cong\angle CAD\cong\angle CHB$,

sledi $HC\cong BC$, odnosno $OM=\frac{1}{2}BC$.



zad. 5.34

5.35. Trougao BNS je jednakokraki, jer su uglovi kod temena B i S podudarni. Zaista:

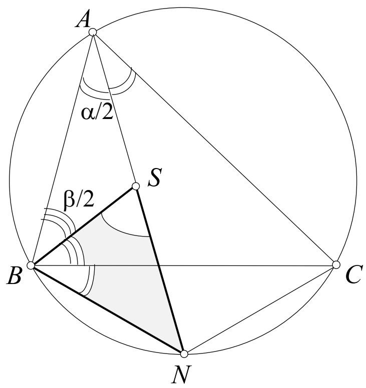
$\angle BSN=\angle ABS+\angle BAS=\alpha/2+\beta/2$

$\angle SBN=\angle SBC+\angle CBN$

$=\angle SBC+\angle CAN=\beta/2+\alpha/2$

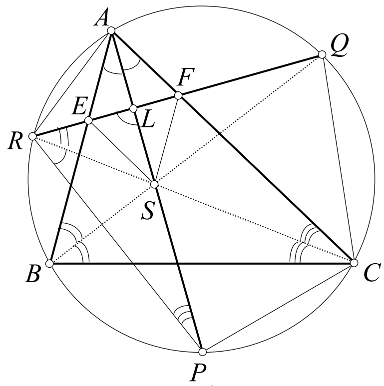
Dakle, $NB\cong NS$, a analogno je i $NC\cong NS$.

Iz poslednjeg je tačka N centar kruga koji sadrži tačke S, B, C. Ako je X tačka simetrična tački S u odnosu na N, tada je ugao SBX prav, pa je BX bisektrisa spoljašnjeg ugla kod temena B, trougla ABC, iz čega sledi da je X centar spolja upisanog kruga tog trougla, koji dodiruje ivicu BC.



zad. 6.35

5.36. (i) Neka je L presečna tačka pravih AP i QR. Na osnovu *primera 1* iz *odeljka 5.2*, tačke P, Q, R pripadaju bisektrisama AS, BS, CS unutrašnjih uglova trougla ABC. Ako sa α, β, γ označimo uglove trougla ABC, tada, koristeći podudarnost odgovarajućih periferijskih uglova, dobijamo:



zad. 6.36

$\angle RPL = \angle RPA = \angle RCA = \gamma/2,$

$\angle PRL = \angle PRQ = \angle PRC + \angle CRQ$

$= \angle PAC + \angle CBQ = \alpha/2 + \beta/2.$

Dakle zbir uglova u trouglu PRL je:

$\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 + \angle RLP = 90° + \angle RPL$, pa je $\angle RPL = 90°$, odnosno $AP \perp QR$.

(ii) Na osnovu *zad. 5.35*, je $RA \cong RS$, pa, iz podudarnosti trouglova ALR i SLR, sledi da je tačka L središte dijagonale AS. Iz podudarnosti trouglova AEL i AFL, zaključujemo da je tačka L središte i dijagonale EF, pa je $AESF$ paralelogram. Kako su te dijagonale upravne, taj četvorougao je romb.

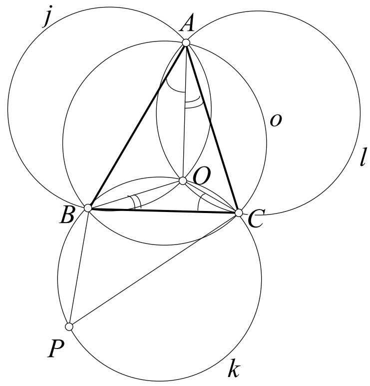
5.40. Ako je O centar kruga k, dokazati da je ugao OXT prav.

5.43. Dužine poluprečnika su 4, 2, 11.

5.45. Vidi rešenje *zad. 11.62*.

5.54. Dokazati da je taj krug upisan u trougao, čija su temena centri data tri kruga.

5.59. Označimo sa k, l, j, o krugove opisane oko trouglova OBC, OAC, OAB, ABC i P proizvoljna tačka kruga k za koju je $O,P \div BC$. Po pretpostavci krugovi k, l, j su istog poluprečnika r. Uglovi BAO i BCO su podudarni jer su periferijski uglovi podudarnih krugova k i j, za tetivu BO. Analogno, podudarni su i uglovi CAO, CBO. Na osnovu toga je:



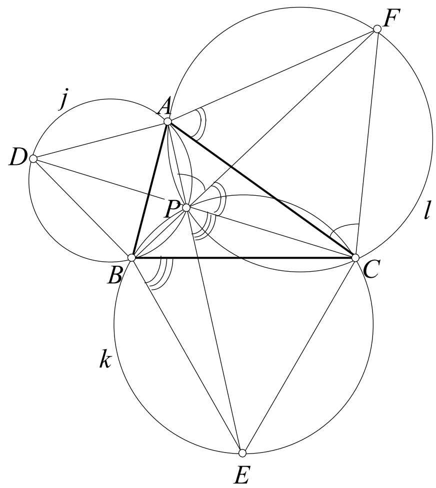
zad. 5.59

$\angle BAC = \angle BAO + \angle CAO$

$= \angle BCO + \angle CBO = 180^\circ - \angle BOC = \angle BPC.$

Dakle krugovi k i o imaju podudarne periferijske uglove za zajedničku tetivu BC, pa su međusobno podudarni.

5.61. (i) Trouglovi AEC i FBC su podudarni ($AC \cong FC$, $CE \cong CB$, $\angle ACE \cong \angle FCB = \angle ACB + 60^\circ$), pa je $AE \cong BF$. Analogno je i $AE \cong CD$.



zad. 5.61

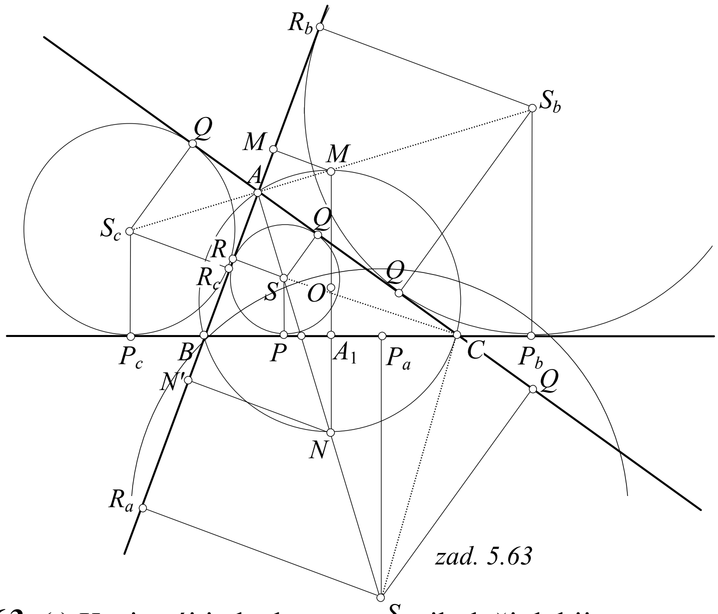
(ii) Neka su k, l, j krugovi opisani oko trouglova BCE, ACF, ABD. Dokažimo da se ti krugovi seku u jednoj tački. Sa P označimo drugu presečnu tačku ($P \neq C$) krugova k i l. Tada uglovi BPC i APC imaju meru 120°, pa onda i ugao APB. Dakle, četvorougao $ADBP$ je tetivan, pa tačka P pripada i krugu j.

Dokažimo da svaka od duži AE, BF, CD sadrži tačku P. Iz jednakosti odgovarajućih periferijskih uglova imamo:

$$\angle APE = \angle APF + \angle FPC + \angle CPE = \angle ACF + \angle FAC + \angle CBE = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ.$$

Prema tome tačke A, P, E su kolinearne tačke, pa tačka P pripada duži AE, a analogno i dužima BF i CD. Takođe je:

$\angle AE,BF \cong \angle APF \cong \angle ACF = 60^{\circ}$.



zad. 5.63

5.63. (*i*) Koristeći jednakost tangentih duži dobijamo:

$$AQ_a = AR_a = \frac{1}{2}(AQ_a + AR_a) = \frac{1}{2}(AB + BR_a + AC + CQ_a)$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BP_a + AC + CP_a) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = s.$$

(*ii*) Analogno kao u prethodnom slučaju.

(*iii*) $QQ_a = AQ_a - AQ = a$.

(*iv*) Izračunati najpre BP i $CP_a = CQ_a$.

(*v*) $P_bP_c = CP_c + BP_b - a = 2s - a = b + c$.

(*vi*) Sledi iz $BP = CP_a = s - b$.

(*vii*) Tačke A_1 i N su središta dijagonala trapeza SPS_aP_a sa osnovama $SP = r$ i

$S_aP_a = r_a$.

(*viii*) Prave NA i S_cS_b su upravne kao simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena A, pa tačka M pripada pravoj S_cS_b. Sada tražena jednakost sledi iz činjenice da je duž A_1M je srednja linija trapeza $S_cR_cR_bS_b$.

(ix) Sledi direktno iz $2R=NM=NA_1+A_1M$ i (vii), ($viii$).

(x) NN' je srednja linija trapeza SRR_aS_a.

(xi) Tačke M i M' su središta dijagonala trapeza $R_cS_cR_bS_b$ sa osnovama $R_cS_c=r_c$ i $R_bR_b=r_b$.

(xii) Tačka N je središte duži RR_a, pa je:

$$N'B=AN'-AB=\frac{1}{2}(AR_a+AR)-c=\frac{1}{2}(s+(s-a))-c=\frac{1}{2}(b-c).$$

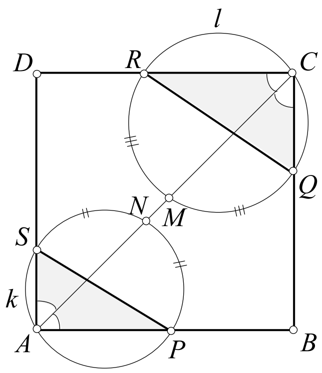
($xiii$), (xiv) Direktno iz prethodno dokazane jednakosti.

Glava VI

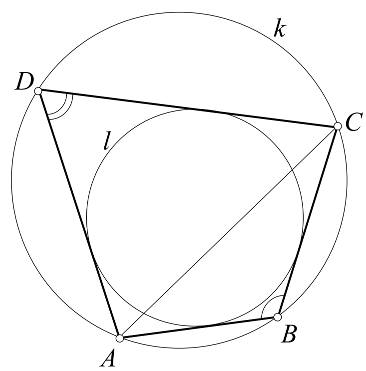
6.20. Konstrukciju četvorougla $ABCD$ svesti na konstrukciju trougla ABD, a zatim koristiti *zad. 6.1 (xx)*.

6.22. Koristiti *zad. 5.55*.

6.24. Kako su uglovi PAS i QCR pravi, temena A i B pripadaju krugovima k i l nad prečnicima PS i QR redom. Dijagonala AC, kvadrata $ABCD$, je simetrala pomenutih uglova, pa sadrži središta N i M odgovarajućih polukrugova određenih sa k i l (*v. primer 1* iz *odeljka 5.2*).



zad. 6.24



zad. 6.29

Konstrukcija se, dakle, svodi najpre na konstrukciju krugova k i l, a zatim prave NM i temena A i B.

6.29. Neka je $AB<BC$. Iz tetivnosti traženog četvorougla $ABCD$ zaključujemo da je: $\angle ADC=180^{\circ}-\angle ABC$, a iz njegove tangentnosti da je: $AD+BC=AB+CD$, odnosno: $CD-AD=BC-AB$.

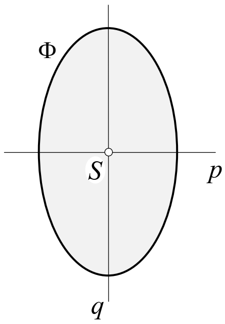
Sada se konstrukcija četvorougla $ABCD$ svodi na konstrukciju trougla ADC, koji je moguće konstruisati (*v. zad 6.1 (ii)*).

6.30. Koristiti *zad. 5.63*.

Glava VII

7.6.6. Neka su p i q te dve ose simetrija figure Φ. Dokažimo da je $p\perp q$. Zaista kako je $\mathcal{S}_p(\Phi)=\mathcal{S}_q(\Phi)=\Phi$, na osnovu *teoreme o transmutaciji* mora biti i:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}(\Phi) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p^{-1}(\Phi) = \Phi.$$



zad. 7.6.6

Međutim, p i q su jedine ose simetrije figure Φ, pa prava $\mathcal{S}_p(q)$ mora biti jedna od njih. U oba slučaja sledi da je $p=q$ ili $p\perp q$, ali prva mogućnost otpada jer su p i q po pretpostavci različite. Dakle, prave p i q su upravne i seku se u nekoj tački S, pa je:

$$\mathcal{S}_S(\Phi)=\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi)=\mathcal{S}_q(\mathcal{S}_p(\Phi))=\Phi.$$

7.9. Neka je $\mathcal{I} = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_p$. Izometrija $\mathcal{I}$ je indirektna, i ima fiksnu tačku E, pa predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_l$. Kako je ugao EAB prav, medijatrise p i x su upravne, pa osne refleksije $\mathcal{S}_p$ i $\mathcal{S}_x$ komutiraju. Dakle, važi:

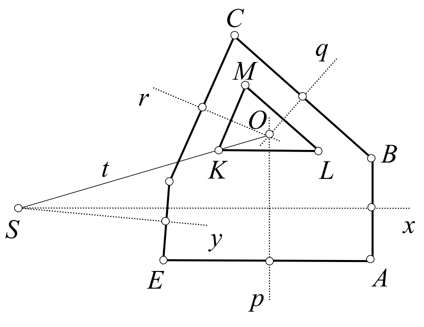
$$\mathcal{I} = \mathcal{S}_l = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_x \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_y \circ (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \circ \mathcal{S}_x.$$

Prave p, q, r pripadaju jednom pramenu (sadrže tačku O), pa kompozicija $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ predstavlja neku osnu refleksiju $\mathcal{S}_t$, pri čemu osa t takođe sadrži tačku O. Prema tome, važi $\mathcal{S}_l = \mathcal{S}_y \circ \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_x$, pa prave x, t, y pripadaju jednom pramenu, odnosno prava t sadrži i tačku S, pa je $t=OS$. Dakle, važi:

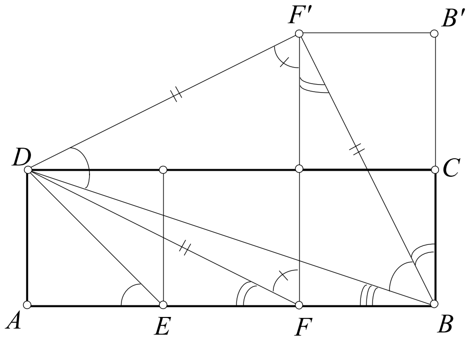
$\mathcal{S}_{OS} = \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.

Neka su p, q, r medijatrise ivica KL, LM, MK trougla KLM. Tada je:

$\mathcal{S}_{OS}(K) = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(K) = K$, pa tačka K, zaista, pripada pravoj OS.



zad. 7.9



zad. 7.12

7.12. Neka je $F'=\mathcal{S}_{CD}(F)$ i $B'=\mathcal{S}_{CD}(B)$. Tada je $DF'\cong DF$ i $\angle DF'F\cong\angle DFF'$. Iz podudarnosti trouglova DAF i $F'B'B$ je $DF\cong F'B$ i $\angle DFA\cong\angle B'BF'$, a takođe važi i $\angle FF'B\cong\angle B'BF'$. Sada je:

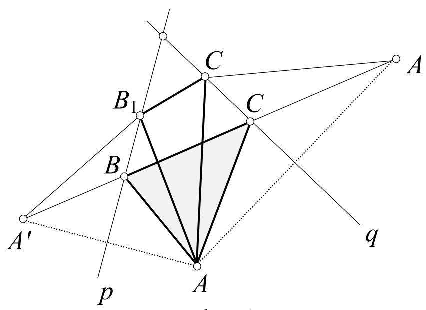
$\angle DF'B=\angle DF'F+\angle FF'B=\angle DFF'+\angle DFA=\angle AFF'=90^{\circ}$.

Kako je $DF'\cong F'B$, trougao $DF'B$ je jednakokrako-pravougli pa je:

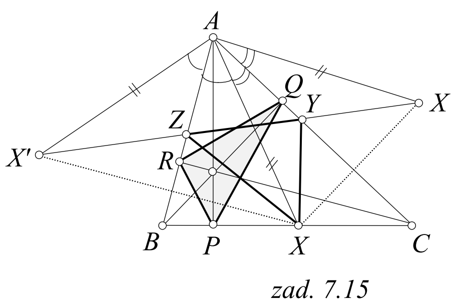
$\angle DBF'=45^{\circ}=\angle AED$. Dakle:

$\angle AED+\angle AFD+\angle ABD=\angle DBF'+\angle F'BB'+\angle ABD=\angle ABC=90^{\circ}$.

7.14. Neka je $A'=\mathcal{S}_p(A)$, $A''=\mathcal{S}_q(A)$ i B i C presečne tačke prave $A'A''$ sa pravama p i q. Tada je ABC traženi trougao. Zaista ako su B_1 i C_1 proizvoljne tačke na pravama p i q, obim trougla AB_1C_1 jednak je dužini poligonalne linije $A'B_1C_1A''$ a obim trougla ABC jednak je dužini duži $A'A''$, pa je obim trougla ABC manji od obima trougla AB_1C_1.



zad. 7.14



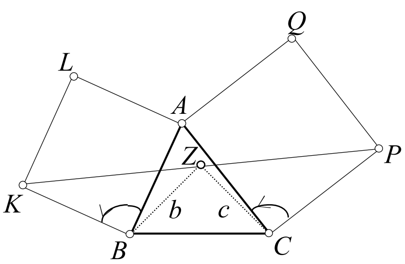
zad. 7.15

7.15. Ako je X proizvoljna tačka ivice BC. Tada se minimalan obim trougla XYZ čija su temena Y, Z na ivicama AC i AB dobija na način koji je opisan u prethodnom *zad. 7.14*; tačke Y i Z se konstruišu kao presečne tačke ivica AC i AB sa pravom $X'X''$, gde je $X'=\mathcal{S}_{AB}(X)$, $X''=\mathcal{S}_{AC}(X)$. Pri tome je obim trougla XYZ jednak dužini duži $X'X''$. Dakle, ostaje da se utvrdi za koju tačku X na ivici BC je obim trougla XYZ minimalan, odnosno za koju duž $X'X''$ ima najmanju dužinu. Iz osobina simetrije zaključujemo da je $AX'\cong AX\cong AX''$ i $\angle X'AX''=2\angle BAC$. Ugao $X'AX''$ je konstantan, pa je na osnovu toga $X'X''$ minimalno za slučaj kada je minimalno $AX'\cong AX$, odnosno kada je $X=P$ podnožje visine iz temena A. Lako se dokazuje da tada odgovarajuće tačke Q i R na ivicama AC i AB predstavljaju takođe podnožja odgovarajućih visina.

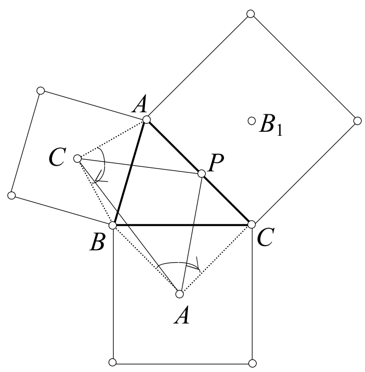
7.24. Ako je $P'=\mathcal{R}_{A,60^o}(P)$, trougao $PP'C$ ima ivice podudarne dužima PA, PB, PC, a mere uglova tog trougla možemo izračunati.

7.29. Neka je: $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{B,-90^\circ} \circ \mathcal{R}_{C,-90^\circ}$. Kako je $90°+90°= 180°$, izometrija $\mathcal{I}$ predstavlja centralnu simetriju $\mathcal{S}_Y$ gde je tačka Y, na osnovu *teoreme 8* iz *odeljka 7.5* , teme jednakokrako-pravouglog trougla BYC. Međutim kako je:

$\mathcal{S}_Y(P)=\mathcal{I}(P)=K$, mora biti $Y=Z$.



zad. 7.29



zad. 7.30

7.30. (*i*) Neka je: $\mathcal{I} = \mathcal{S}_{C_0} \circ \mathcal{R}_{A©,\square} \circ \mathcal{S}_{B_0} \circ \mathcal{R}_{A,-\square}$. Kako je $90°+90°= 180°$, izometrija $\mathcal{I}$ predstavlja centralnu simetriju $\mathcal{S}_Q$ gde je tačka Q, na osnovu *teoreme 8* iz *odeljka 7.5* , teme jednakokrako-pravouglog trougla C_1QA_1. Međutim kako je:

$\mathcal{S}_Q(A)=\mathcal{I}(A)=C$, mora biti $Q=P$.

(*ii*) Rotacijom $\mathcal{R}_{P,90^\circ}$, duž C_1C preslikava se u duž A_1B_1.

(*iii*) Na osnovu prethodnog, prave AA_1, BB_1, CC_1 sadrže visine trougla $A_1B_1C_1$.

7.33. Neka je: $\mathcal{I}=\mathcal{R}_{Q,120^0}\circ\mathcal{R}_{P,120^0}\circ\mathcal{R}_{R,120^0}$.

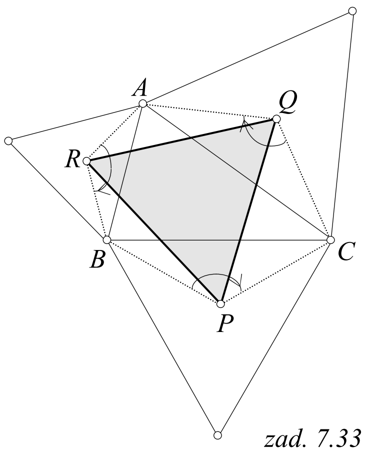
Kako je $120^o+120^o+120^o=360^o$, izometrija $\mathcal{I}$ je koincidencija ili translacija, ali na osnovu $\mathcal{I}(A)=A$, mora biti $\mathcal{I}=\mathcal{E}$. Dakle važi:

$$\mathcal{R}_{Q,120^o}\circ\mathcal{R}_{P,120^o}\circ\mathcal{R}_{R,120^o}=\mathcal{E}\text{, odnosno:}$$

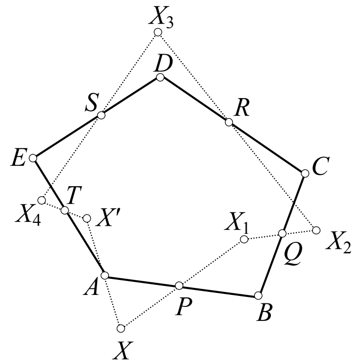
$$\mathcal{R}_{P,120^o}\circ\mathcal{R}_{R,120^o}=\mathcal{R}^{-1}_{Q,120^o}=\mathcal{R}_{Q,240^o}.$$

Pretpostavimo da je Q' treće teme pravilnog trougla $PQ'R$. Dokažimo da je tada $Q=Q'$. Zaista, tada je, na osnovu *teoreme 8*, iz *odeljka 7.5*:

$\mathcal{R}_{P,120^o}\circ\mathcal{R}_{R,120^o}=\mathcal{R}_{Q',240^o}$, pa je $\mathcal{R}_{Q,240^o}=\mathcal{R}_{Q',240^o}$, odnosno $Q=Q'$.



zad. 7.33



zad. 7.39

7.39. Neka je $ABCDE$ traženi petougao i:

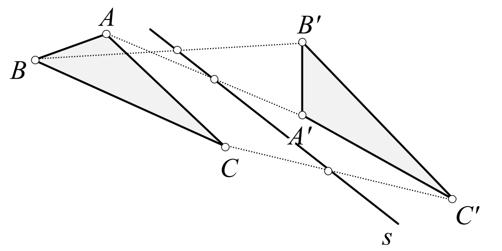
$$\mathcal{I}=\mathcal{S}_T\circ\mathcal{S}_S\circ\mathcal{S}_R\circ\mathcal{S}_Q\circ\mathcal{S}_P.$$

Na osnovu *zad. 7.38*, izometrija $\mathcal{I}$ predstavlja centralnu simetriju $\mathcal{S}_O$. Kako je $\mathcal{S}_O(A)=\mathcal{I}(A)=A$, mora biti $O=A$, pa je, dakle, $\mathcal{I}=\mathcal{S}_A$. Tačku A sada možemo konstruisati kao središte duži XX', gde je X proizvoljna tačka, a $X'=\mathcal{I}(X)$.

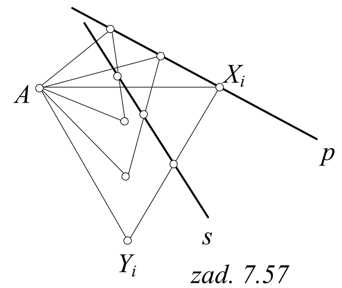
7.49. Neka su A, B dva centra simetrije figure Φ. Tada je $\mathcal{S}_A(\Phi)=\mathcal{S}_B(\Phi)=\Phi$, pa i $\tau_{\vec{v}}(\Phi)=\mathcal{S}_B(\mathcal{S}_A(\Phi))=\Phi$, gde je $\vec{v}=2AB$. Na osnovu toga je i $\tau_{\vec{v}}^{n}(\Phi)=\Phi$, gde je n proizvoljan prirodan broj, pa bi za proizvoljnu tačku P figure Φ i tačka $P'=\tau_{\vec{v}}^{n}(P)$ pripadala toj figuri. To, međutim, nije moguće jer je Φ ograničena a $PP'=n\vec{v}$, pa ona može imati najviše jedan centar simetrije.

7.55 Prema *Šalovoj teoremi* (*iz odeljka 7.9*) jedine indirektne izometrije su osne i klizajuće refleksije. U oba slučaja tražena prava je osa odgovarajuće osne odnosno klizajuće refleksije.

7.56. Iz uslova tvrđenja iz zadatka sledi da postoji indirektna izometrija koja preslikava trougao ABC u trougao $A'B'C'$. Tada su A, A'; B, B'; C, C' parovi te izometrije, pa prema teoremi *Šal-Hjelmsleva* (*v. zad. 7.55*) središta duži AA', BB', CC' pripadaju jednoj pravoj.



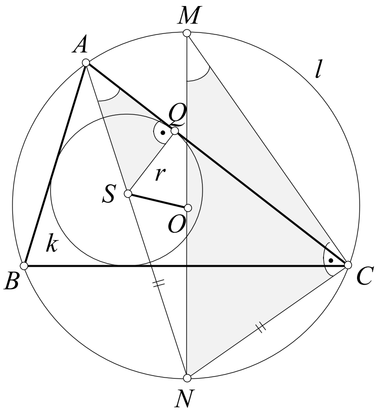
zad. 7.56



zad. 7.57

7.57. Neka je $\mathcal{T}=\mathcal{S}_p\circ\mathcal{R}_{A,60^o}$. Izometrija $\mathcal{T}$ je indirektna, a tačke X_i preslikava u tačke Y_i, pa, prema teoremi *Šal-Hjelmsleva* (*v. zad. 7.55*), središta duži X_iY_i pripadaju jednoj pravoj.

Glava VIII



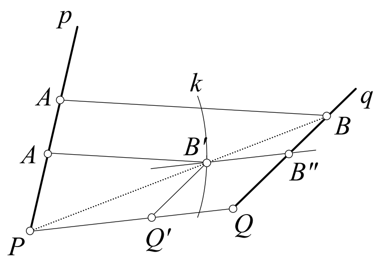
zad. 8.7.5

8.7.5. Označimo sa A, B, C temena trougla, NM prečnik kruga l koji je upravan na ivici BC ($A,N\div BC$). Tada tačka N pripada bisektrisi unutrašnjeg ugla kod temena A, tj. polupravoj AS (*v. primer 1* iz *5.2*). Koristeći potenciju, a zatim *zad. 5.35*:

$$\wp(S,l)=SO^2-R^2=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SN}=-SA\cdot SN$$
$$=-SA\cdot CN.$$

Ako je Q dodirna tačka kruga k sa ivicom AC, pravougli trouglovi AQS i MCN su slični ($\angle SAQ\cong\angle NMC$), pa je:

$$\frac{AS}{MN}=\frac{SQ}{NC},\text{ pa je } SO^2=R^2-SA\cdot CN=R^2-MN\cdot SQ=R^2-2Rr.$$



zad. 8.10

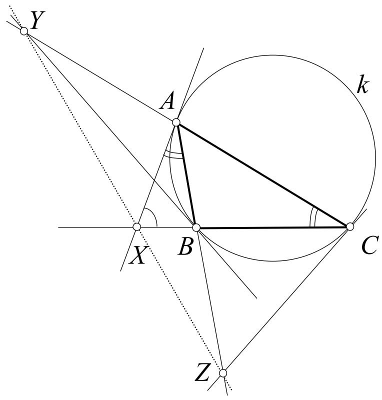
8.10. Sa A' i B'' označimo tačke polupravih Pp i Qq, takve da je $PA'\cong QB''\cong x$, gde je x proizvoljna duž. Neka je B' jedna od presečnih tačka kruga $k(A',2x)$ i prave koja sadrži tačku B'' i paralelna je sa pravom PQ, a Q' četvrto teme paralelograma $QB''B'Q'$. Dakle, tačka Q' pripada pravoj PQ i važi $Q'B'\cong QB''\cong x$, $A'B'\cong 2x$. Sa $\mathcal{H}$ označimo homotetiju sa centrom P i koeficijentom $\dfrac{PQ}{PQ'}$; tada je $\mathcal{H}(Q')=Q$. Ako je $\mathcal{H}(A')=A$, $\mathcal{H}(B')=B$, tada po definiciji homotetije tačke A i B pripadaju polupravama Pp i Qq ($B\in q$ jer je $Q'B'\|Qq$). Takođe je i $PA{:}AB{:}BQ=PA'{:}A'B'{:}B'Q'=x{:}2x{:}x=1{:}2{:}1$.

8.30. Neka je S presek dijagonala četvorougla $ABCD$ koji treba konstruisati. Primeniti *Apolonijev krug* i konstruisati najpre trougao ASB.

8.36. Primeniti *Stjuartovu teoremu* i *primer 1* iz *odeljka 8.5*.

8.37. Iskoristiti nekoliko puta *Stjuartovu teoremu*.

8.40. Neka su X, Y, Z presečne tačke pravih BC, AC, AB sa odgovarajućim tangentama u tačkama A, B, C, kruga k, opisanog oko trougla ABC. Tada je:



zad. 8.40

$p(X,k)=XB \cdot XC = XA^2$, odnosno:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AX^2}{XC^2}.$$

Iz sličnosti trouglova AXB i CXA je:

$$\frac{AX}{XC} = \frac{BA}{AC}, \text{ pa važi i } \frac{BX}{XC} = \frac{BA^2}{AC^2}.$$

Koristeći prethodnu i analogne relacije dobijamo:

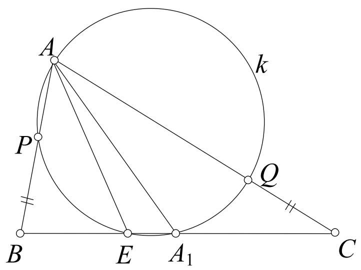
$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} = -\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = -\frac{BA^2}{AC^2} \cdot \frac{CB^2}{BA^2} \cdot \frac{AC^2}{CB^2} = -1,$$

pa su, na osnovu *Menelajeve teoreme*, tačke X, Y, Z kolinearne.

8.48. Primeniti *Ptolomejevu teoremu*.

8.51. Ako je t data prava i A, B date tačke, koristiti potenciju tačke $P=AB \cap t$ u odnosu na traženi krug.

8.53. Koristeći potenciju u odnosu na krug k:



zad. 8.53

$p(B,k)=BP \cdot BA=BE \cdot BA_1$,

$p(C,k)=CQ \cdot CA=CE \cdot CA_1$,

odatle je: $\dfrac{BP \cdot BA}{CQ \cdot CA} = \dfrac{BE}{CE}$, odnosno, koristeći *primer* iz *odeljka 8.5*, $BP=CQ$.

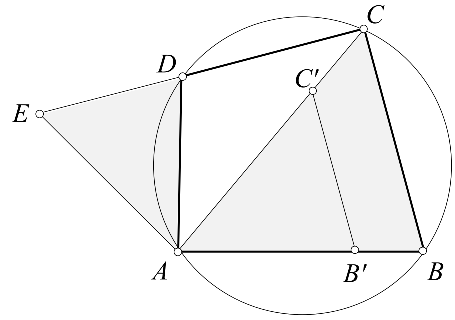
8.56. Slično kao *zad. 8.7.6*.

8.57. Ako su centri datih krugova nekolinearne tačke, centar traženog kruga predstavlja potencijalno središte tih krugova. Ako su centri datih krugova kolinearne tačke, takav krug ne postoji (on je u tom slučaju "degerisani krug" tj. prava određena tim centrima).

8.58. *v. zad. 8.6.3.*

8.59. (i) Ako je $ABCDE$ traženi pravilan petougao, na osnovu *zad. 8.57* možemo konstruisati najpre trougao ABC.

8.62. Neka je $ABCD$ tetivan četvorougao sa ivicama podudarnim datim dužima a, b, c, d; $\mathcal{H}$ homotetija sa centrom A i koeficijentom $k = \dfrac{AD}{AB}$, a $\mathcal{R}$ rotacija sa centrom A za orijentisani ugao $\alpha=\angle BAD$ i $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti:



zad. 8.62

$$\mathcal{P} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}.$$

Sa B' i C' označimo slike tačaka B i C u homotetiji $\mathcal{H}$. Kako je $AB'\cong AD$ i $\angle B'AD=\alpha$, važi $\mathcal{R}(B')=D$, odnosno $\mathcal{P}(B)=D$. Neka je $E=\mathcal{R}(C')$, odnosno $E=\mathcal{P}(C)$. Tada je trougao ADE slika trougla ABC u transformaciji $\mathcal{P}$, pa su ti trouglovi slični sa koeficijentom sličnosti k. Na osnovu toga je:

$$\angle EDC=\angle EDA+\angle ADC=\angle CBA+\angle ADC=180°,$$

pa su tačke E, D, C kolinearne. Duž ED možemo konstruisati jer je:

$$ED=C'B'=\frac{CB\cdot AB'}{AB}=\frac{CB\cdot AD}{AB}=\frac{b\cdot d}{a}.$$

Nakon konstrukcije tačaka C, D, E može se konstruisati i tačka A, jer je:

$$\frac{AE}{AC}=\frac{AC'}{AC}=k,$$

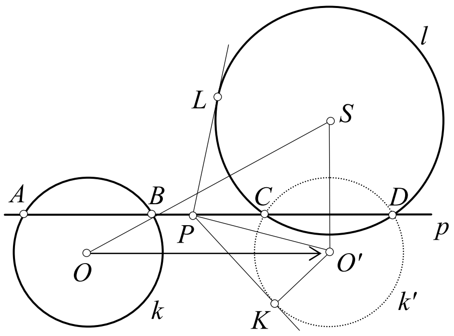
pa tačka A pripada odgovarajućem *Apolonijevom krugu* za tačke E i C, kao i krugu $k(D,a)$.

8.63 Neka je p prava koja sadrži tačku P i seče krugove k i l u tačkama A, B i C, D pri čemu je $AB\cong CD$. Neka je $\vec{v}$ vektor određen središtima duži AB i CD. Tada se krug k translacijom $\tau_{\vec{v}}$ preslikava u krug k' koji sadrži tačke C i D. Dakle krugovi k' i l seku se u tačkama C i D. Jasno je da se konstrukcija prave p svodi na konstrukciju vektora $\vec{v}$, odnosno tačke $O'=\tau_{\vec{v}}(O)$, centra kruga k'. Prava određena centrima S i O' krugova l i k'

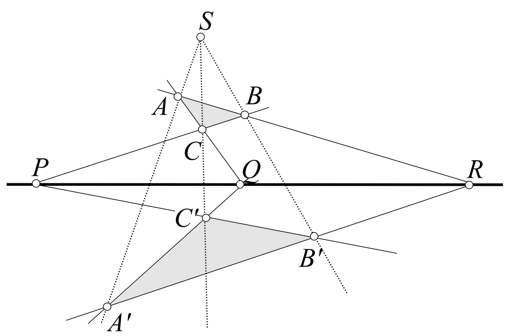
upravna je na njihovoj zajedničkoj tetivi CD. Tada iz $OO'=\vec{v}\parallel p$ sledi $\angle OO'S=90°$. Dakle, tačka O' pripada krugu nad prečnikom OS. Tačka P pripada potencijalnoj osi p, krugova k' i l. Na osnovu toga je $PL\cong PK$, gde su PL i PK tangente krugova l i k' u tačkama L i K. Ako sa r označimo poluprečnik kruga k biće:

$$PO'^2 = PK^2 + KO'^2 = PL^2 + r^2.$$

Dakle, možemo konstruisati duž d, podudarnu duži PO', pa tačka O' pripada preseku kruga sa centrom P, poluprečnika d, i kruga nad prečnikom OS.



zad. 8.63



zad. 8.64

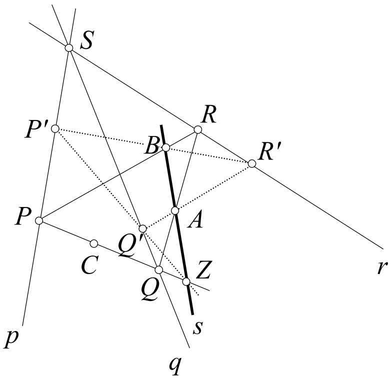
8.64. Primenimo Menelajevu teoremu u odnosu na trouglove $SA'B'$, $SA'C'$, $SB'C'$. Tada je:

$$\frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{AA'}}\cdot\frac{\overrightarrow{A'R}}{\overrightarrow{RB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{BS}}=-1,\quad \frac{\overrightarrow{SA}}{\overrightarrow{AA'}}\cdot\frac{\overrightarrow{A'Q}}{\overrightarrow{QC'}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{CS}}=-1,\ \frac{\overrightarrow{SC}}{\overrightarrow{CC'}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'P}}{\overrightarrow{PB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{BS}}=-1.$$

Iz prethodne tri relacije sledi $\frac{\overrightarrow{A'Q}}{\overrightarrow{QC'}}\cdot\frac{\overrightarrow{C'P}}{\overrightarrow{PB'}}\cdot\frac{\overrightarrow{B'R}}{\overrightarrow{RA'}}=-1$, pa su prema obratnoj Menelajevoj teoremi u odnosu na trougao $A'B'C'$ tačke P, Q, R kolinearne.

8.65. Primeniti *Dezargovu teoremu* (*v. zad 8.64*) na trouglove ABC i $A'B'C'$.

8.66. Neka je PQR trougao čija temena P, Q, R pripadaju pravama p, q, r a strane QR, PR, PQ sadrže tačke A, B, C redom. Sa S označimo zajedničku tačku pravih p, q, r.



zad. 8.66

Ako je $P'Q'R'$ proizvoljan trougao čija temena pripadaju pravama p, q, r, i čije strane $R'Q'$ i $R'P'$ sadrže tačke A i B (dakle "zaboravljen" je uslov vezan za tačku C), tada su, prema *Dezargovoj teoremi* (*v. zad. 8.64*), tačke A, B, $Z=PQ\cap P'Q'$ kolinearne i pripadaju nekoj pravoj s.

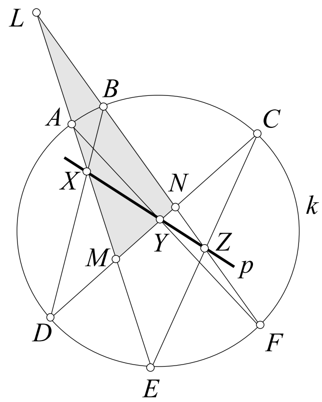
Trougao PQR sada možemo konstruisati, ako najpre konstruišemo pomoćni trougao $P'Q'R'$, kod koga je tačka R' proizvoljna. Zatim konstruišemo tačku Z kao presečnu tačku pravih AB i $P'Q'$, čime je određena prava PQ.

8.67. Neka je $L=AE\cap BF$, $M=AE\cap CD$, $N=CD\cap BF$. Primenimo tri puta Menelajevu teoremu na trougao LMN i prave BD, AF, CE. Tada je:

$$\frac{\overrightarrow{LX}}{\overrightarrow{XM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{DN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{BL}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LA}}{\overrightarrow{AM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{YN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NF}}{\overrightarrow{FL}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LE}}{\overrightarrow{EM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NZ}}{\overrightarrow{ZL}}=-1.$$



zad. 8.67

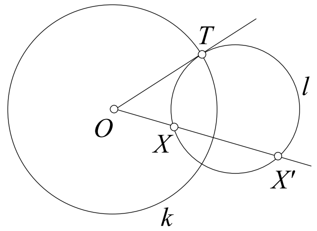
Na osnovu potencije tačaka M, N, L u odnosu na krug k je dalje:

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{ME},$$
$$\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{NF}\cdot\overrightarrow{NB},\quad \overrightarrow{LA}\cdot\overrightarrow{LE}=\overrightarrow{LB}\cdot\overrightarrow{LF}.$$

Iz prethodnih šest relacija sledi da je i $\frac{\overrightarrow{LX}}{\overrightarrow{XM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{YN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NZ}}{\overrightarrow{ZL}}=-1$, pa su prema obratnoj Menelajevoj teoremi tačke X, Y, Z kolinearne.

Glava IX

9.4. Sa O označimo centar a sa r poluprečnik kruga k.



$\Leftarrow$. Ako je $k=l$, tvrđenje je trivijalno. Neka su k i l upravni; sa T označimo jednu njihovu presečnu tačku. Tada je prava OT tangenta kruga l. Neka je X proizvoljna tačka kruga l i X' druga presečna tačka tog kruga sa polupravom OX. Tada je:

$\wp(O,l)=OX\cdot OX'=OT^2=r^2$, pa je $\psi_k(X)=X'\in l$. Analogno je svaka tačka Y, kruga l, slika neke tačke tog kruga, pa važi $\psi_k(l)=l$.

$\Rightarrow$. Neka je $\psi_k(l)=l$. Ako je $l\neq k$, tada postoji tačka X na krugu l koja ne pripada krugu k. Neka je $X'=\psi_k(X)\in l$. Na osnovu definicije inverzije, tačke X i X' su na polupravoj sa početnom tačkom O, pa je O spoljašnja tačka kruga l. Dakle, postoji tangenta iz tačke O na krug l; sa T označimo dodirnu tačku te tangente sa tim krugom. Tada je:

$$\wp(O,l)=OT^2=OX\cdot OX'=r^2,$$

pa tačka T pripada krugu k. Na osnovu toga su krugovi k i l upravni.

9.5. Dokazati pomoćno tvrđenje: ako su A, B, C, D četiri razne kolinearne tačke i O središte duži AB, tada je $\mathcal{H}(A,B;C,D)$ akko je $OC\cdot OD=OB^2$.

9.11. Primeniti inverziju u odnosu na krug sa centrom u tački A i *primer 1* iz *odeljka 9.1*.

9.12. Koristiti inverziju ψ_k, u odnosu na krug $k(B,p)$ kojom se tačka A' preslikava u tačku C.

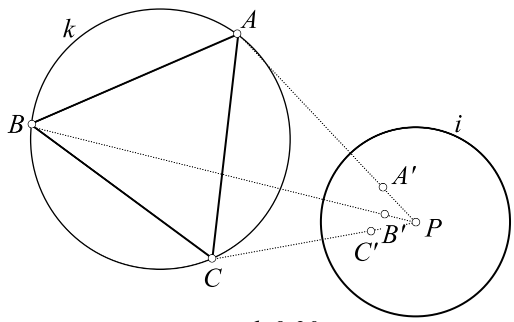
9.19. Koristiti inverziju ψ_i, gde je i proizvoljan krug sa centrom A. Konstrukcija traženog kruga x svodi se tada na konstrukciju prave $x'=\psi_i(x)$ koja dodiruje krug $p'=\psi_i(p)$, a krug $k'=\psi_i(k)$ seče pod uglom ω.

9.20. Neka je i krug sa centrom u P, proizvoljnog poluprečnika r, i ψ_i inverzija u odnosu na taj krug koja tačke A, B, C preslikava u tačke A', B', C'. Tada je, na osnovu *primera* iz *odeljka 9.1*:

$$A'B' = \frac{r^2}{PA \cdot PB} AB$$

$$B'C' = \frac{r^2}{PB \cdot PC} BC$$

$$A'C' = \frac{r^2}{PA \cdot PC} AC$$



zad. 9.20

Kako je trougao ABC pravilan, iz prethodne tri relacije zaključujemo da je:

$A'B':B'C':A'C'=PC:PA:PB$.

Sada možemo preći na dokaz tražene ekvivalencije:

$P \notin k$ akko $\psi_i(k)$ predstavlja krug

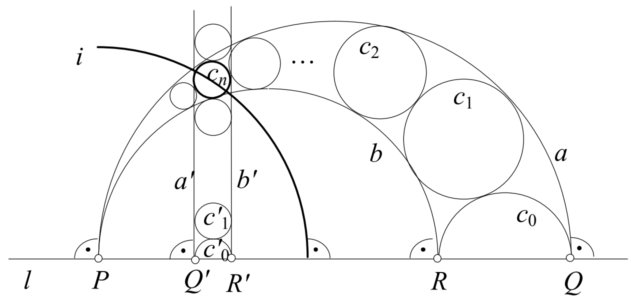
akko su tačke A', B', C' nekolinearne

akko duži $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ predstavljaju ivice nekog trougla

akko duži PC, PA, PB predstavljaju ivice nekog trougla.

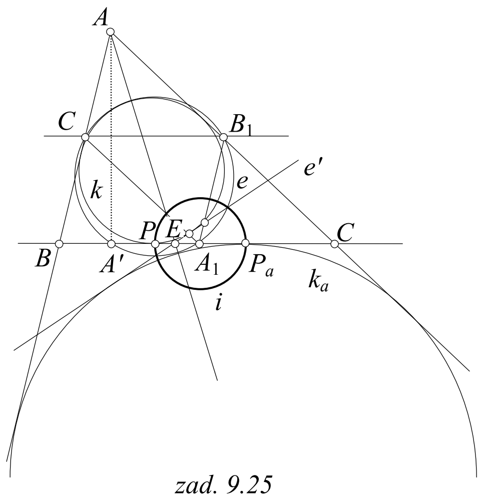
9.22. Primeniti inverziju u odnosu na krug sa centrom u tački A. Tada se zadatak svodi na *primer 1* iz *odeljka 5.4*.

9.23. Neka je i krug sa centrom u tački P, koji je upravan na krugu c_n (krug i sadrži dodirne tačke tangenti iz tačke P na krug c_n). Inverzijom ψ_i u odnosu na taj krug se prava $l=PQ$ i krugovi a i b preslikavaju u prave l', a', b'; pri čemu su prave a' i b' upravne na pravoj l', budući da je inverzija konformno preslikavanje. Krugovi $c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ...$ preslikavaju se u podudarne krugove $c'_0, c'_1, c'_2, ..., c'_n, ...$, koji dodiruju paralelne prave a', b', a svi su podudarni krugu c_n, jer je $c'_n=c_n$. Dalje centar kruga c_0 pripada pravoj l, pa je rastojanje centra kruga $c_n=c'_n$ od te prave n puta veće od poluprečnika tog kruga.



zad. 9.23

9.25. Neka su P i Pa dodirne tačke upisanog kruga k i spolja upisanog kruga k_a trougla ABC sa ivicom BC. Ojlerov krug e tog trougla sadrži središta A_1, B_1, C_1 odgovarajućih ivica i podnožje visine A' iz temena A. Tačka A_1 je središte duži PPa (v. zad. 5.63 (*vi*)). Inverzijom ψ_i u odnosu na krug $i(A_1,A_1P)$, krugovi k i k_a se preslikavaju u sebe jer su normalni na krug i (v. zad. 9.4). Krug l sadrži centar inverzije, pa se tom inverzijom preslikava u neku pravu e'. Ostaje nam da dokažemo da prava e' dodiruje krugove k i k_a. Prava e' sadrži tačku $\psi_i(A')=E$, koja predstavlja presek bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A sa ivicom BC trougla ABC (v. zad. 9.5 i zad. 11.21 (*iii*)), a takođe i tačke $\psi_i(B_1)=B'_1$ i $\psi_i(C_1)=C'_1$. Trougao $A_1B_1C_1$ je sličan sa trouglom $A_1C'_1B'_1$. Na osnovu toga prava e' sa pravom AB određuje ugao ACB, pa, kako pravu BC seče u tački E koja pripada bisektrisi ugla BAC, predstavlja drugu zajedničku tangentu krugova k i k_a.



zad. 9.25

9.26. Koristiti *primer 2* iz *odeljka 8.6* i *zad. 9.20*.

Glava XI

11.14. Iskoristiti *teoremu (i)* iz *odeljka 4.4*.

11.15. Trouglovi $A_{3k}B_{3k}C_{3k}$, gde $k\in \mathbf{N}$ su slični sa trouglom ABC.

11.16. Neka je $L=AB_1\cap BC_1$, $M=AB_1\cap CA_1$, $N=CA_1\cap BC_1$. Primenimo pet puta *Menelajevu teoremu* na trougao LMN i prave BA_1, AC_1, CB_1, AB, A_1B_1:

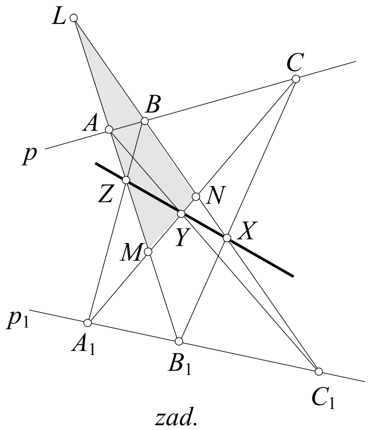
$$\boxed{\frac{\overrightarrow{LZ}}{\overrightarrow{ZM}}}\cdot\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{A_1N}}\cdot\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{BL}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LA}}{\overrightarrow{AM}}\cdot\boxed{\frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{YN}}}\cdot\frac{\overrightarrow{NC_1}}{\overrightarrow{C_1L}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LB_1}}{\overrightarrow{B_1M}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}}\cdot\boxed{\frac{\overrightarrow{NX}}{\overrightarrow{XL}}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LA}}{\overrightarrow{AM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{CN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{BL}}=-1,$$

$$\frac{\overrightarrow{LB_1}}{\overrightarrow{B_1M}}\cdot\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overrightarrow{A_1N}}\cdot\frac{\overrightarrow{NC_1}}{\overrightarrow{C_1L}}=-1.$$



zad.

Iz prethodnih pet relacija (množeći prve tri, a zatim zamenjujući četvrtu i petu) sledi da je i:

$$\frac{\overrightarrow{LZ}}{\overrightarrow{ZM}}\cdot\frac{\overrightarrow{MY}}{\overrightarrow{YN}}\cdot\frac{\overrightarrow{NX}}{\overrightarrow{XL}}=-1,$$

pa su prema *obratnoj Menelajevoj teoremi* tačke X, Y, Z kolinearne.

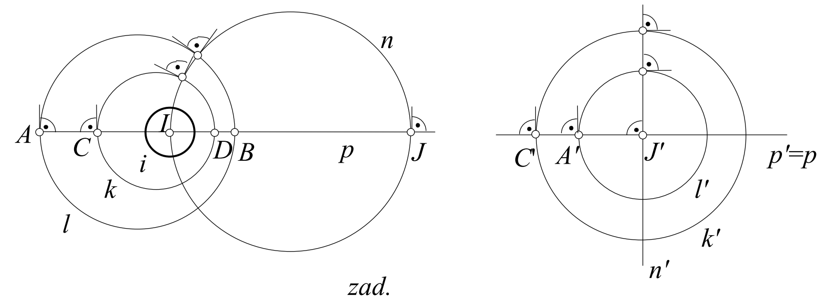
Napomena: Uporediti iskaz i dokaz prethodne teoreme sa *Paskalovom teoremom* (*v. zad. 8.67*)

11.17. U slučaju kada se prave AB i A_1B_1 seku primeniti dva puta *Talesovu teoremu* i jednom *obratnu Talesovu teoremu*. Slučaj kada su prave AB i A_1B_1 paralelne je jednostavan.

11.21. Koristiti *primer* iz *odeljka 8.5*, kao i činjenicu da se normalnim projektovanjem "čuva" relacija harmonijske spregnutosti parova tačaka.

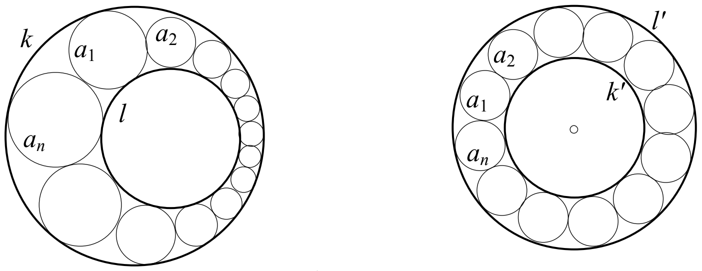
11.23. Koristiti *zad.: 5.63*, *11.21*, *11.19* i *11.22*.

11.24. U slučaju kada ima rešenja, centar traženog kruga pripada potencijalnoj osi datih krugova.



zad.

11.26. Neka je p prava određena centrima krugova k i l; ta prava je tada upravna na tim krugovima. Na osnovu *zad. 11.24*, postoji krug n sa centrom na pravoj p koji je upravan na krugovima k i l. Kako je centar kruga n na pravoj p, to je i krug n normalan na pravoj p. Sa I i J, označimo preseke kruga n, sa pravom p. Neka je i proizvoljan krug sa centrom I i ψ_i inverzija u odnosu na taj krug. Kako inverzija "čuva" uglove, sa ψ_i se prava p i krug n (bez tačke I) slikaju u dve upravne prave $p'=p$ i n' a krugovi k i l u krugove k' i l' koji su upravni na tim pravama, pa su krugovi k' i l' koncetrični.



zad.

11.27. Primeniti *zad. 11.26*, i svesti tvrđenje na trivijalan slučaj kada su krugovi k i l koncentrični.

11.30. Koristiti homotetiju sa centrom S i koeficijentom $-\frac{n}{m}$.

11.38. Ako je $P'=s_{OA}(P)$, izračunati ugao $P'XQ$.

11.39. Neka su A_1, A_2, ... , A_n tačke sa datim svojstvima. Sa k_i ($i\in\{1,2,...,n\}$) označimo krugove sa centrima A_i, poluprečnika r. Neka su A_p, A_q, A_l proizvoljne tačke iz skupa tačaka $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Tada, po pretpostavci, postoji krug sa centrom O poluprečnika r, takav da su A_p, A_q, A_l tačke odgovarajuće kružne površi. Na osnovu toga je OA_p, OA_q,

$OA_l \leq r$, pa tačka O pripada kružnim površima k_p, k_q, k_l. Dakle, svake tri od kružnih površi $k_1, k_2, ..., k_n$ se seku. Kako su kružne površi konveksne figure, na osnovu *Helijeve teoreme* (*v. zad. 2.29*), postoji tačka S koja pripada svim kružnim površima $k_1, k_2, ..., k_n$. Tada je $k(S,r)$ traženi krug, jer je $SA_1, SA_2, ..., SA_n \leq r$.

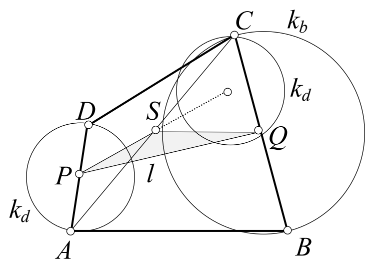
11.40. Na osnovu *zad. 11.39*, dovoljno je dokazati da za svake tri tačke, od tih n tačaka, postoji odgovarajući krug.

11.43. Koristiti *zad. 7.30*.

11.47. U slučaju kada je m=-n traženi skup tačaka je prava (*v. lemu iz odeljka 8.7*). U slučaju $m \neq n$, primeniti *Stjuartovu teoremu*, na trougao AXB. Traženi skup tačaka je tada krug, sa centrom S, gde je S tačka za koju je $\overrightarrow{AS} : \overrightarrow{SB} = n : m$.

11.48. (*i*) Videti rešenje *zad. 8.62*.

(*ii*) Neka su P i Q središta ivica BC=b i AD=d četvorougla $ABCD$, pri čemu je PQ=l, AB=a, CD=c. Sa S označimo središte dijagonale AC. Trougao PSQ moguće je konstruisati, jer je: $PS = \frac{c}{2}$, $QS = \frac{a}{2}$.



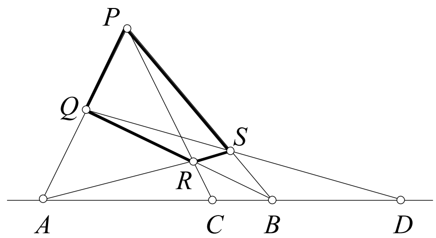
zad.

Kako je C=$\mathcal{S}_S(A)$, tačka C pripada krugu $k_b(Q, \frac{b}{2})$, i slici k_d' kruga $k_d(P, \frac{d}{2})$ u centralnoj simetriji $\mathcal{S}_S$.

11.49. Primeniti *Ptolomejevu teoremu*, više puta. Uporediti zadatak sa *primerom 2* iz *odeljka 8.6*.

11.51. Na osnovu Menelajeve teoreme, primenjene na trougao ABP i pravu QS, možemo zaključiti da je:

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QA}} = -1 .$$



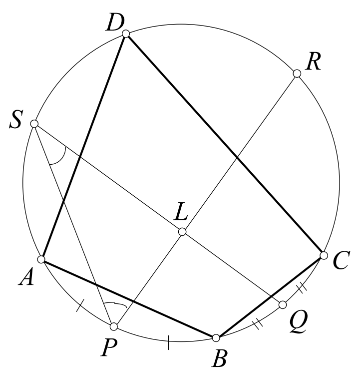
zad.

Analogno, primenom Čevaove teoreme na isti trougao i tačku R dobijamo:

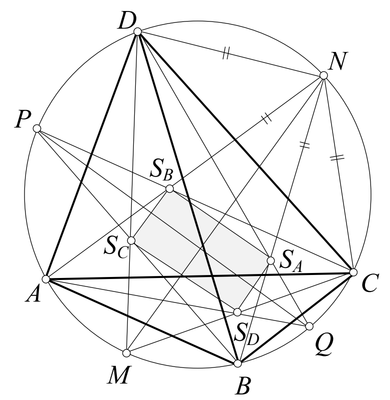
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BS}}{\overrightarrow{SP}} \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{QA}} = 1.$$

Iz prethodne dve relacije sledi $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, tj. $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

11.62. Neka je L presečna tačka pravih PR i SQ. Luk PQ (na kome je tačka B) je odgovarajući za periferijski ugao PSL, pa je taj ugao jednak polovini centralnog ugla koji određuje taj luk, odnosno četvrtini centralnog ugla koji određuje luk AC na kome je tačka B. Analogno, periferijski ugao SPL jednak je četvrtini centralnog ugla koji određuje luk AC na kome je tačka D. Dakle, zbir uglova PSL i SPL jednak je četvrtini centralnog ugla od 360°, pa je, u trouglu SPL, ugao kod temena L prav.

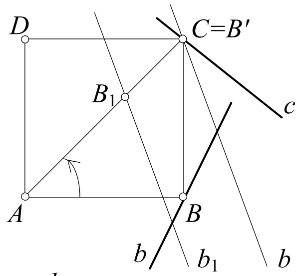


zad.



zad.

11.63. Neka su M, Q, N, P središta lukova AB, BC, CD, DA kruga opisanog oko četvorougla $ABCD$, na kojima nisu preostala temena tog četvorougla. Tada poluprave AN, CP, BN, DQ bisektrise odgovarajućih periferijskih uglova (*v. primer 1* iz odeljka 5.2). Na osnovu toga je $S_B=AN\cap CP$ i $S_A=BN\cap DQ$ Takođe je iz trouglova ACD i BCD $ND=NS_B=NC$ i $ND=NS_A=NC$ (*v. zad. 5.35*), pa je $NS_B=NS_A$, a kako je NM bisektrisa ugla ANB (jer je M središte luka AB) odnosno ugla S_BNS_A, NM je ujedno simetrala duži S_BS_A. Analogno, prava NM je simetrala i duži S_CS_D, a prava PQ zajednička simetrala i duži S_CS_B, i S_AS_D. Prave MN i PQ su upravne (*v. zad. 11.62*), pa je četvorougao $S_AS_BS_CS_D$ zaista pravougaonik.



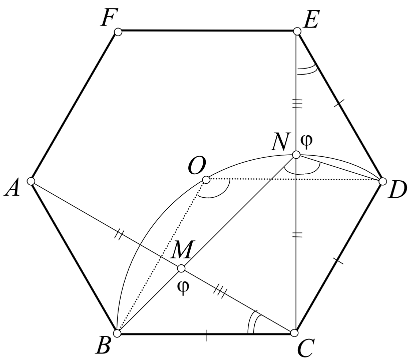
zad.

11.65. Ako je $\mathcal{P}$ transformacija sličnosti koja predstavlja kompoziciju rotacije i homotetije: $\mathcal{P} = \mathcal{H}_{A,k} \circ \mathcal{R}_{A,45^\circ}$, gde je $k=\sqrt{2}$, tada važi $\mathcal{P}(B)=C$, pa $C\in c\cap\mathcal{P}(b)$.

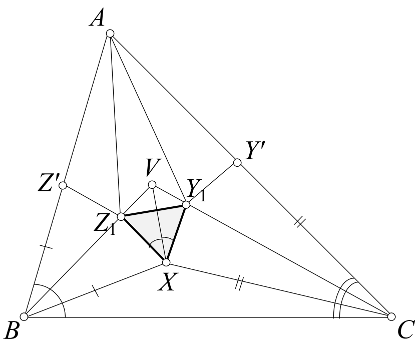
11.66. Kako je po pretpostavci $AM\cong CN$, iz podudarnosti odgovarajućih dijagonala sledi $CM\cong EN$. Tada, na osnovu $BC\cong DE$ i $\angle BCM\cong\angle DEN=30^\circ$, sledi podudarnost trouglova BCM i DEN a zatim: $\angle BCM\cong\angle DEN=\varphi$. Tada je:

$$\angle BND=\angle CND+\angle BNC$$
$$=(180^\circ-\varphi)+(\varphi-60^\circ)=120^\circ.$$

Neka je O centar pravilnog šestougla $ABCDEF$, i k krug $k(C,CB)$. Tada tačke O i D pripadaju tom krugu i važi $\angle BOD=120^\circ$. Dakle, sada je $\angle BOD\cong\angle BOD$, pa i tačka N pripada krugu k, na osnovu čega sledi $CN\cong CB$.



zad.



zad.

11.70. Neka su X i V preseci odgovarajućih trisektrisa uglova kod temena B i C trougla ABC, pri čemu je X unutrašnja tačka trougla BVC. Neka su dalje, Z_1 i Y_1 tačke trisektrisa BV i CV, takve da je $\angle Z_1XV=\angle VXY_1=30^\circ$. Tačka X je centar upisanog kruga trougla BVC, pa je poluprava VX bisektrisa ugla BVC. Sada iz podudarnosti trouglova VXZ_1 i VXY_1 sledi $XZ_1\cong XY_1$, pa kako je $\angle Z_1XY_1=60^\circ$, trougao XY_1Z_1 je pravilan. Ostaje nam da dokažemo da je $Y=Y_1$ i $Z=Z_1$, odnosno da tačke Y_1 i Z_1 pripadaju trisektrisama ugla kod temena A. Neka su Z' i Y' tačke na ivicama AB i AC trougla ABC, takve da je $BZ'\cong BX$ i $CY'\cong CX$. Trouglovi $BZ'Z_1$ i BXZ_1 su podudarni, pa je $Z'Z_1\cong XZ_1$. Analogno je i $Y'Y_1\cong XY_1$, pa na osnovu toga važi $Z'Z_1\cong Z_1Y_1\cong Y_1Y'$. Označimo sa 3α, 3β, 3γ uglove kod temena A, B, C trougla ABC. Posle izračunavanja dobijamo da je:

$$\angle Z'Z_1Y_1=\angle Z'Z_1U+\angle UZ_1Y_1=...=60°+2\angle UZ_1Y_1=...=180°-2\alpha.$$

analogno je i $\angle Y'Y_1Z_1=180°-2\alpha$, pa, na osnovu *zad. 11.69*, sledi:

$\angle Z'AZ_1=\angle Z_1AY_1=\angle Y_1A\,Y'=\alpha$, što je trebalo dokazati.

11.81. Neka su X', X'' i Y', Y'' podnožja upravnih iz tačaka X i Y na tetivama AB i CD. Sa x i y označimo duži SX i SY. Primenom *Talesove teoreme* je:

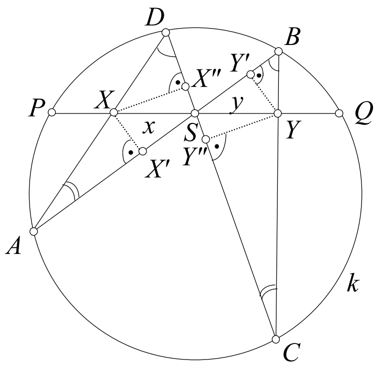
$$\frac{x}{y}=\frac{XX'}{YY'}=\frac{XX''}{YY''}.$$

Koristeći poslednje jednakosti, a zatim sličnost trouglova AXX' i CYY'', kao i trouglova DXX'' i BYY' i konačno potencije tačaka X i Y u odnosu na krug k dobijamo:

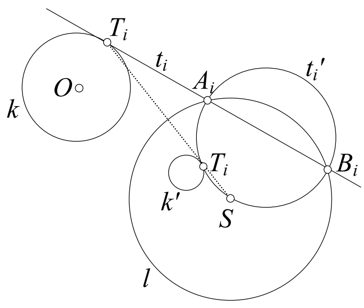
$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{XX'}{YY'}\cdot\frac{XX''}{YY''}=\frac{XX'}{YY''}\cdot\frac{XX''}{YY'}=\frac{AX}{CY}\cdot\frac{DX}{BY}$$

$$=\frac{XP\cdot XQ}{YP\cdot YQ}=\frac{(PS-x)(PS+x)}{(PS+y)(PS-y)}=\frac{PS^2-x^2}{PS^2-y^2}.$$

Sada iz $\dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{PS^2-x^2}{PS^2-y^2}$ sledi $x=y$.



zad.



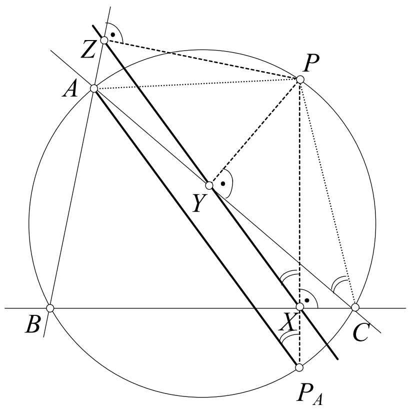
zad.

11.82. Prečnik kruga c_n je dužine $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

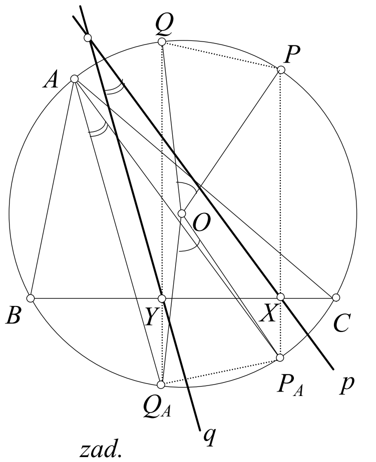
11.85. Primeniti *Stjuartovu teoremu* (ili direktno *zad. 8.7.5*).

11.87. Neka je ψ_l inverzija u odnosu na krug l. Tada se prave t_i tom inverzijom preslikavaju u krugove t_i' opisane oko trouglova SA_iB_i (bez tačke S). Kako prave t_i dodiruju krug k, krugovi t_i' dodiruju krug $k'=\psi_l(k)$.

11.90. Neka su X, Y, Z podnožja upravnih iz te tačke na pravama BC, AC, AB. četvorougao $PYXC$ je tetivan, pa je $\angle YXP \cong \angle ACP$. Kao uglovi nad tetivom AP, podudarni su i uglovi ACP i AP_AP, pa je na osnovu toga $\angle YXP \cong \angle AP_AP$, odnosno $XY \| AP_A$.



zad.



zad.

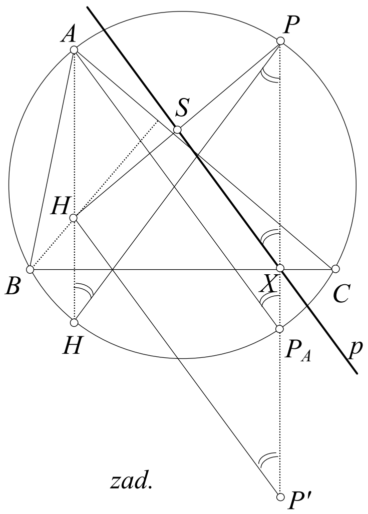
11.91. Neka su X i Y podnožja normala iz tačaka P i Q na pravoj BC, i P_A, Q_A presečne tačke tih normala sa krugom k. Simpsonove prave p i q paralelne su redom sa pravama AP_A i AQ_A (*v. zad. 11.90*). Dakle, ugao koji određuju prave p i q podudaran je periferijskom uglu Q_AAP_A, a poslednji je jednak polovini centralnog ugla Q_AOP_A, odnosno ugla QOP (jer je trapez PP_AQ_AQ jednakokraki, pa je $PQ \cong P_AQ_A$).

11.92. Neka su P_A i X tačke definisane kao u prethodnom zadatku (*v. zad. 11.91*). Neka su H', P' tačke simetrične tačkama H i P u odnosu na pravu BC. Tačka H' pripada krugu k opisanom oko trougla ABC (*v. zad. 5.14*). Tada je:

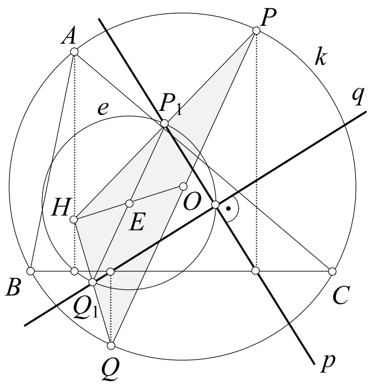
$\angle HP'P \cong \angle H'PP' \cong \angle AH'P \cong \angle AP_AP \cong \angle p,P'P$

Poslednja podudarnost sledi na osnovu *zad. 11.90*. Dakle, $\angle HP'P \cong \angle p,P'P$, pa su prave HP' i p paralelne. Kako je tačka X središte duži PP', prava p sadrži srednju liniju trougla PHP', pa onda i središte ivice PH.

11.93. Prve p i q su upravne na osnovu *zad. 11.91*. Neka je $k(O,R)$ krug opisan oko trougla ABC, H ortocentar i P_1, Q_1 središta duži HP i HQ. Tačke P_1 i Q_1 pripadaju redom pravama p i q (*v. zad. 11.92*). Dakle, P_1Q_1 je srednja linija trougla PHQ, a O je središte prečnika PQ, pa presečna tačka pravih P_1Q_1 i HO, tačka E, predstavlja zajedničko središte duži HO i P_1Q_1. Tada je tačka E centar Ojlerovog kruga e sa prečnikom R (*v. primer 3.* iz *8.3*). Dalje je P_1Q_1 prečnik kruga e, jer je E središte duži P_1Q_1, a $P_1Q_1 = PQ/2 = R$. Prave p i q su upravne, pa njihova presečna tačka pripada krugu e.



zad.



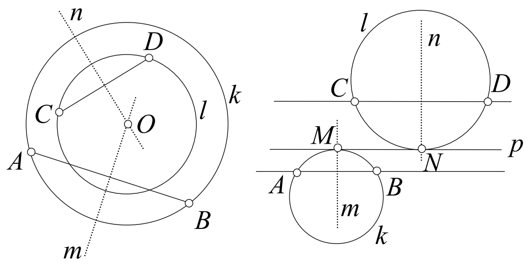
zad.

11.94. Iskoristiti *zad. 11.14*.

11.100. Neka su m i n medijatrise duži AB i CD. Razmotrićemo dva slučaja:

1) Ako se prave m i n seku u tački O, traženi krugovi su $k(O,OA)$ i $l(O,OC)$; oni su koncetrični i po pretpostavci različiti.

2) Ako su prave m i n paralelne, tada su paralelne i prave AB i CD (i po pretpostavci različite). Sa p označimo pravu paralelnu sa AB i CD takvu da su AB i CD sa raznih strana prave p. Ako su M i N ($M \neq N$) presečne tačke pravih m i n sa pravom p, traženi krugovi su opisani oko trouglova ABM i CDN, jer su sa raznih strana prave p. Ako je $M=N$ tj. $m=n$, traženi krugovi su su $k(M,MA)$ i $l(M,MC)$.



zad.

11.101. Neka je: $\mathcal{T} = \mathcal{S}_{C_0} \circ \mathcal{S}_{A',\alpha} \circ \mathcal{R}_{B_0} \circ \mathcal{S}_{A,-\alpha}$.

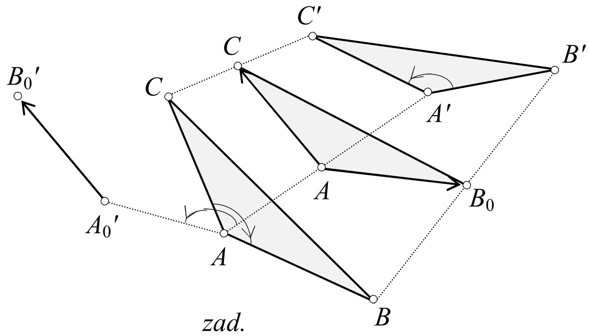
Kako je zbir odgovarajućih uglova rotacija jednak 360°, a $\mathcal{T}(C)=C$, mora biti $\mathcal{T}=\mathcal{E}$. Koristeći to, kao i *teoremu o transmutaciji*, dobijamo:

$\mathcal{E} = \mathcal{S}_{C_0} \circ (\mathcal{S}_{A_0} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{S}_{A_0}) \circ \mathcal{S}_{B_0} \circ \mathcal{R}_{A,-\alpha}$, a zatim:

$\mathcal{E} = \tau_{2\overrightarrow{A_0C_0}} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \tau_{2\overrightarrow{B_0A_0}} \circ \mathcal{R}_{A,-\alpha}$, odnosno:

$$\tau_{2A_0C_0} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \tau_{2A_0B_0} \circ \mathcal{R}_{A,-\alpha} = \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \tau_{2A_0B_0} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha}^{-1} = \tau_{2A_0'B_0'},$$

gde je $A_0'=\mathcal{R}_{A,\alpha}(A_0)$, $B_0'=\mathcal{R}_{A,\alpha}(B_0)$. Dakle $2\overrightarrow{A_0C_0} = 2\overrightarrow{A_0'B_0'}$, a rotacijom $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ se vektor $\overrightarrow{A_0B_0}$ preslikava u vektor $\overrightarrow{A_0'B_0'}$, pa je $A_0B_0 \cong A_0'B_0' \cong A_0C_0$ i $\angle B_0A_0C_0 = \angle A_0B_0, A_0C_0 = \angle A_0B_0, A_0'B_0' = \alpha$.

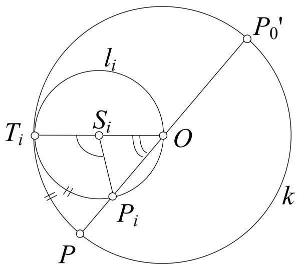


zad.

11.102. Iskoristiti *zad. 11.101*.

11.103. Konstruisati centar traženog kruga u preseku dva odgovarajuća geometrijska mesta tačaka ("zaboravljajući" po jedan uslov). Prvo geometrijsko mesto tačaka određeno je iz uslova da je traženi krug normalan na dva data kruga, a drugo iz uslova da je traženi krug normalan na jedan dati krug, a drugi seče u dijametrelno suprotnim tačkama.

11.104. Neka je P_0 položaj tačke P u trenutku kada ona pripada krugu k. U trenutku kada je tačka P u položaju P_i, krug l (u položaju l_i) dodiruje krug k u tački T_i. Kako se radi o "kretanju bez klizanja", dužine lukova P_0T_i i P_iT_i su jednake. Poluprečnik kruga k je dva puta veći od poluprečnika kruga l pa, zbog prethodnog, mora biti:



zad.

$$\angle T_iS_iP_i=2\angle T_iOP_0.$$

Međutim, $\angle T_iOP_i$ je odgovarajući periferijski ugao kruga l, pa je:

$$2\angle T_iOP_i=\angle T_iS_iP_i=2\angle T_iOP_0.$$

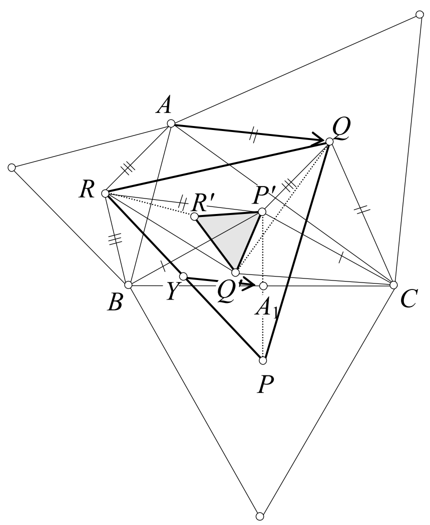
Dakle, tačka P_i je kolinearna sa tačkama O i P_0, pa je tražena putanja tačke P, prečnik P_0P_0' ($P_0'=\mathcal{S}_O(P_0)$) kruga k.

11.105. Koristiti inverziju u odnosu na krug sa centrom S i poluprečnikom ST.

11.109. (*i*) Na sličan način kao u *zad. 7.33* dokazujemo da je i trougao $P'Q'R'$ pravilan.

(*ii*) Iz $\angle BCP'\cong\angle ACQ=30^\circ$, sledi: $\angle BCA\cong\angle P'CQ$.

Takođe je $CQ:CA=CP':CB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ pa su trouglovi ABC i $QP'C$ zaista slični sa koeficijentom sličnosti $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Analogno dokazujemo i da su trouglovi ABC i RBP' slični sa istim



zad.

koeficijentom sličnosti, pa su trouglovi $QP'C$ i RBP' podudarni.

(*iii*) Iz podudarnosti trouglova $QP'C$ i RBP' sledi:

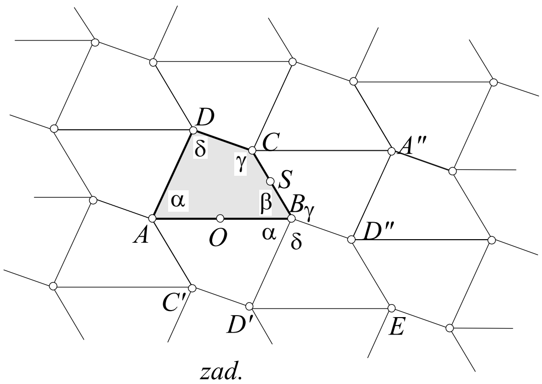
$QP' \cong RB \cong RA$ i $P'R \cong CQ \cong QA$, pa je četvorougao $ARP'Q$ paralelogram. Analogno dokazujemo i da je četvorougao $CP'RQ'$ paralelogram.

(*iv*) YA_1 je srednja linija trougla RPP', pa je:

$$\overrightarrow{YA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{RP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}.$$

11.110. Težišna duž AA_1 trougla ABC i QY težišna duž trougla PQR seku se u tački koja ih deli u odnosu 2:1 (*v. zad. 11.109* (*iv*)), pa ta tačka predstavlja zajedničko težište trouglova ABC i PQR. Analogno se dokazuje i da trouglovi ABC i $P'Q'R'$ imaju zajedničko težište.

11.111. Neka je $ABCD$ proizvoljni četvorougao neke ravni sa unutrašnjim uglovima α, β, γ, δ i neka su O, S središta njegovih ivica AB i BC. Centralnim simetrijama $\mathcal{S}_O$ i $\mathcal{S}_S$, taj četvorougao preslikava se u četvorouglove $BAC'D'$ i $A''CBD''$, pri čemu je $\angle ABD' \cong \alpha$ i $\angle CBD'' \cong \gamma$. Na osnovu toga je $\angle D'BD'' \cong \delta$, pa, kako je $BD' \cong AD$ i $BD'' \cong CD$, postoji tačka E, takva da su četvorouglovi $D'ED''B$ i $ABCD$ podudarni. Dakle, oko tačke B sustiče se četiri četvorougla, od kojih je svaki podudaran četvorouglu $ABCD$. Sada se postupak "prekrivanja" ravni može nastaviti, tako što koristimo centralne simetrije u odnosu na središta ivica novonastalih četvorouglova.



zad.

11.112. Primeniti inverziju u odnosu na proizvoljan krug sa centrom u tački A.

11.114. Primeniti *zad. 11.9.* i *11.79.*

Indeks

Adler, A. *133*
Ajnštajn, A. *7*
aksioma *3*
- Dedekindova *23*
- Lobačevskog *24*
- Pašova *12*
- Plejferova *24*
Apolonijev krug *181*
Apolonijevi problemi o dodiru krugova *208*
Arhimed *71*, *188*, *213*

Belati, Đ. *161*
bisektrisa ugla *40*
Boljaj, J. *6*
Brahmagupta *109*
Brijanšon, Š. Ž. 66, *201*

centar
- homotetije *172*
- kruga *22*
- opisanog kruga trougla *54*
- upisanog kruga trougla *54*, *56*
- pravilnog trougla *58*
- rotacije *128*
- simetrije *132*

centralna simetrija *132*
centralno odstojanje tetive *83*

četvorougao
- tangentni *89*
- tetivni *91*
- Lambertov *5*
- Sakerijev *5*
Čevaova teorema *165*

deduktivni metod *1*
definicija *2*
deltoid *90*
Dezargova teorema *179*
diedar *102*
dijagonala *13*
dokaz *3*
duž *12*
dvorazmera duži *152*

ekscentrični krugovi *85*
elementarne konstrukcije *110*
Erdeš, P. *64*
Euklid *4*, *20*, *21*, *44*, *50*
euklidski(a) prostor, ravan, prava *22*

Fagnanov problem *142*
Fejer, L. *142*
Ferma, P. *110*, *189*
figura *7*
- konveksna *14*
- ograničena *145*
- osnosimetrična *123*
- centralnosimetrična *133*
fiksne tačke *31*
Fojerbahove tačke *189*

Galaj, T. *64*
Galoa, E. *30*, *110*
Gaus, C. F. *110*
geometrija
- afina *49*, *65*
- apsolutna *22*
- euklidska *5*, *6*, *21*
- Lobačevskog (hiperbolička) *5*, *6*, *21*
- projektivna *179*, *220*
- Rimanova (eliptička) *22*
geometrijska sredina dve duži *153*
grupa *30*, *110*
- izometrija *30*, *213*
- simetrija *144*, *146*
- diedarska *144*, *146*
- ciklična *144*, *146*
- Abelova *67*
- Klajnova *214*
- translacija *214*
- homotetija sa istim centrom *156*

Hamiltonova teorema *80*
harmonijska četvorka tačaka *152*, *161*
Helijeva teorema *27*
Heron *124*
Hilbert, D. *6*, *11*
Hiparh *191*
hipotenuza *53*
Hjelmslev, J. T. *146*
homotetija *153*
Horner, V. Dž. *226*

incidencija *8*
induktivni metod *1*
invarijantne tačke *31*
inverzija *182*
inverzna
- izometrija *30*
- transformacija sličnosti *158*
inverzivna ravan *217*
involucija *121*
ivice
- mnogougla *13*
- trougla *13*
između *7*, *10*
izometrija *29*, *119*
- direktna *119*
- indirektna *119*

jedinična duž *147*
Jungova teorema *222*

Karamata, J. *64*
Karnoova teorema *226*

kateta *53*
Kepler, J. *63*
koeficijent
- homotetije *153*
- transformacije sličnosti *157*
- sličnosti *158*
koincidencija *30*
Kokseter, H. S. M. *64*
kolinearne(i)
- tačke *7*
- vektori *66*
komplanarne(i)
- tačke *7*
- vektori *67*
- prave *7*
kompozicija
- izometrija *30*
- transformacija sličnosti *158*
koncentrični krugovi *85*
konciklične tačke *94*
konformna preslikavanja *185*
konstrukcije
- lenjirom i šestarom *109*
- samo lenjirom (u projektivnoj geometriji) *179*
- samo šestarom *118*
- u afinoj geometriji *118*
Kopernik, N. *228*
kosinusna teorema *200*
Košijeva teorema *100*
kraci
- ugla *15*
- jednakokrakog trougla *41*
- trapeza *49*
krajnja tačka duži *12*
krug *19*, *83*
- opisan oko trougla *54*
- Ojlerov (Ponseleov) *59*, *156*
- upisan u trougao *56*
- spolja upisan *61*
- inverzije *182*
- Tejlorov *227*
kružnica *83*
kvadrat *51*
kvadratura kruga *110*

Lajbnicova teorema *177*
Lambert, J. H. *179*
Lemoanova tačka *177*
Lemus, D. K. L. *63*
Leonardo da Vinči *146*, *173*
Ležandr, A. M. *5*
linearna zavisnost vektora *77*
Lobačevski, N. I. *5*, *6*, *21*
Luilie, S. A. Ž. *99*
luk *87*
Magnus, L. *182*
Maskeronijeve konstrukcije *118*
medijatrisa duži *39*
Menelaj *165*, *191*
Menelajeva teorema *165*
mera
- duži *147*
- ugla *37*
- vektora *75*
Mikelova tačka *92*

Mikelova teorema

o šest krugova *189*
mimoilazne prave *9*
mnogougao *13*
množenje vektora
- celim brojem *68*
- racionalnim skalarom *72*
- realnim skalarom *76*
Mor, G. *118*
Morlijeva teorema *225*

Nagelova tačka *178*
Napoleonov trougao *144*, *229*
naspramne ivice četvorougla *49*
naspramni uglovi četvorougla *49*
nejednakost trougla *47*
normalna projekcija *104*
normalnost
- pravih *37*
- krugova *85*
- ravni *103*
- prave i ravni *100*
n-tougao *13*
nula vektor *66*

oblast *14*
Ojler, L. *59*, *156*
Ojlerova formula *173*
Ojlerova prava *80*
Ojlerova teorema *226*
orijentacija
- trougla *16*
- ravni *16*
- ugla *16*
orijentisani
- trougao *16*
- ugao *16*
ortocentar *57*
ortogonalnost
- pravih *37*
- krugova *85*
- ravni *103*
- prave i ravni *100*
ortologički trouglovi *226*
osa simetrije
- figure *123*
- osne refleksije *120*
- klizajuće refleksije *138*
osnova
- jednakokrakog trougla *41*
- trapeza *49*
osnovne konstrukcije *109*

Paskalova teorema *179*
Papos *189*, *220*
Paposova teorema *220*
paralelnost
- pravih *22*
- ravni *23*
- prave i ravni *23*
paralelogram *49*
Peano, Đ. *11*
peti Euklidov postulat *4*
Pitagora *4*, *39*, *45*, *63*, *173*
Pitagorina teorema *167*
podela duži *77*, *152*
podudarnost
- parova tačaka *7*, *17*
- *n*-torki tačaka *19*
- figura *33*

- trouglova *39*
Poenkare, A. *6*, *63*
pojmovi
- osnovni *2*
- izvedeni *2*
poligon *13*
poligonalna linija *13*
poluprava *12*
poluprečnik kruga *19*
poluravan *14*
Ponsele, Ž. V. *59*, *156*, *179*, *220*
potencija tačke *171*
potencijalna osa *171*
potencijalno središte *172*
površ
- trougaona *15*
- kružna *83*
- mnogougaona *16*
površina trougla *199*
pramen
- pravih *126*
- krugova *172*
prava *7*
pravac *23*
pravac vektora *66*
prave
- paralelne *22*
- mimoilazne *9*
pravilan
- n-tougao *52*
- trougao *42*, *52*
pravilo
- paralelograma *68*
- nadovezivanja *67*
- trougla *67*
- poligona *68*
pravougaonik *51*
prečnik kruga *83*
pretpostavljene teorije *3*
proporcija duži *148*
prostor *7*
Ptolomej *166*, *191*
Ptolomejeva teorema *166*

ravan *7*
razmera
- duži *148*
- kolinearnih vektora *72*, *76*
refleksija
- klizajuća *138*
- osna *120*
romb *51*
rotacija *128*

sa iste strane
- tačke *12*
- prave *14*
sa raznih strana
- tačke *12*
- prave *14*
sečica kruga *84*
Silvesterov problem *64*
simetrala
- duži *39*
- ugla *36*
Simson, R. *95*, *167*
Simsonova prava *95*, *227*
sistem aksioma
- neprotivrečan *3*

- potpun *3*
- minimalan *3*

sistem merenja duži *147*

sličnost
- figura *158*
- trouglova *159*

središte duži
- u euklidskoj geometriji *34*
- u afinoj geometriji *72*

srednja linija
- trougla *52*
- trapeza *53*

stavovi o
- podudarnosti trouglova *39*
- sličnosti trouglova *159*

Stjuartova teorema *167*

suprotni vektor *66*

susedne ivice četvorougla *49*

susedni uglovi četvorougla *49*

Šalova teorema *140*

Šal-Hjelmsleva teorema *146*

Štajner, J. *63*, *170*

Štajnerova teorema *221*

Štajner-Lamusova lema *63*

tačka *7*

Tales *4*, *39*, *85*, *159*

Talesova teorema
- spec. slučaj, u polju ***Q*** *73*
- u vektorskom obliku,
direktna i obratna *76*
- u obliku razmere duži *148*

tangenta kruga *55*, *84*

tangentne duži *89*

teme
- ugla *15*
- trougla *13*
- mnogougla *13*

teorema
- o srednjoj liniji trougla *52*
- o paralelogramu *50*
- o tri normale *101*
- Leonarda da Vinčija *146*
- o leptiru *226*

teselacija *63*

tetiva kruga *83*

težišna duž *56*

težište
- trougla *56*
- figure *75*

Toričelijeva tačka *99*, *189*

transformacija *29*
- izometrijska *29*
- sličnosti *157*

translacija *135*

transmutacija *122*

trapez *49*

trisekcija ugla *110*

trisektrisa *225*

trougao *13*
- pravilan
(jednakostraničan) *42*, *52*
- jednakokraki *41*
- pravougli, oštrougli,
tupougli *53*

tvrđenja *2*
- osnovna *3*
- izvedena *3*

udvostručenje kocke *110*
ugao *15*
- opružen *15*
- prav, oštar, tup *37*
- centralni, periferijski *85*
- diedra *103*
- prave prema ravni *104*
- mimoilaznih pravih *104*
- između dve ravni *103*
- između dva kruga *85*
- rotacije *128*

ugaona linija *12*
uglovi
- susedni *15*
- naporedni *15*
- unakrsni *15*
- komplementni *37*
- suplementni *37*
- trougla *15*, *45*
- unutrašnji *45*
- spoljašnji *45*
- na transverzali *43*
- suprotni, saglasni, naizmenični *44*
- sa normalnim kracima *46*
- sa paralelnim kracima *44*

Vancel, P. L. *110*
vektor *66*
- translacije *135*
- klizajuće refleksije *138*

vektorski prostor
- nad poljem ***Q*** *73*
- nad poljem ***R*** *76*

visina trougla *56*

zajednička normala mimoilaznih pravih *106*
zatvoreni sistem nadovezanih vektora *69*
zbir
- duži *35*
- uglova *36*
- vektora *67*
- uglova trougla *45*

zlatni presek *173*
značajne tačke trougla *57*

Žergonova tačka *168*

Literatura

[1] D. Lopandić, *Geometrija za treći razred usmerenog obrazovanja*, Naučna kjniga, Beograd 1979.

[2] D. Lopandić, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, PMF, Beograd 1971.

[3] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Grafitti i Matematički fakultet, Beograd 1994.

[4] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Random House, New York, 1967.

[5] E. Stipanić, *Putevima razvitka matematike*, Vuk Karadžić, Beograd 1988.

[6] J. Cofman, *What to Solve?*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[7] R. Tošić, V. Petrović, *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*, Građevinska knjiga, Novi Sad 1982.

[8] V. Stojanović, *Matematiskop III*, Nauka, Beograd, 1988.

[9] D. Hilbert, *Osnove geometrije*, Naučno delo, Beograd, 1957.

[10] Euklid, *Elementi*, Naučna knjiga, Beograd, 1949.

[11] V. V. Prasalov, *Zadači po geometriji*, Nauka, Moskva, 1986.

[12] N. Čepinac, D. Janošević, *Zbirka zadataka iz planimetrije*, Znanje, Beograd, 1952.

[13] M. Prvanović, *Osnove geometrije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[14] G. Martin, *Transformation Geometry*, Springer-Verlang, New York, 1982.

[15] Dirk J. Struik, *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1991.